# INSTITUZIONI
# ANALITICHE
*AD USO*
DELLA GIOVENTU' ITALIANA

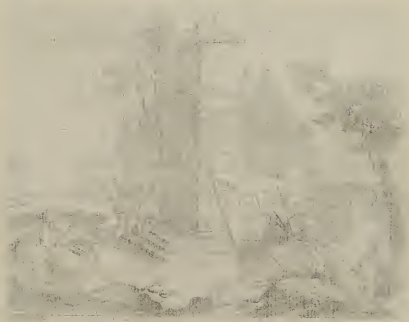

## DI D.NA MARIA GAETANA
## AGNESI
MILANESE

*Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.*


## TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.

*CON LICENZA DE' SUPERIORI.*

A L L A

SACRA CESAREA REALE MAESTÀ

D E L L'

AUGUSTISSIMA IMPERATRICE

# MARIA TERESA

## D' A U S T R I A

REGINA D'ONGARIA E DI BOEMIA

ec. ec. ec.

*Ra quanti penſieri ó io ravvolto nell' animo per ſollevarmi a ſperare, che Voi poteſtè,* SACRA CESAREA REAL MAESTA', *con eſtrema degnazione accogliere queſt' opera mia, che va ſuperba del Voſtro Auguſtiſſimo Nome, e de' Voſtri Fortunatiſ-*

*ſimi Auſpicj, un ſolo mi conforta, ed è queſto la conſiderazione del Voſtro Seſſo, che da* VOI *illuſtrato per bella ſorte è pur mio. Queſto penſiero mi á ſoſtenuta nella fatica, e non mi á laſciato ſentire il riſchio dell' impreſa; e veramente ſe in qualche tempo poteva giuſtificarſi l'ardimento di una Donna, che tentaſſe ſeguire i rapidi voli di una Scienza, che ſpazia mai ſempre negli Infiniti, in quel tempo eſſere ciò doveva, nel quale regna una* DONNA, *e regna con univerſale ammirazione. Parmi in fatti, che in queſta età, che fra tutte le venture chiara, ed altera avrà da* VOI *il nome, debbano le Donne tutte ſervire alla gloria del loro ſeſſo, e ciaſcuna, per quanto le può venir fatto, contribuire all' accreſcimento dello Splendore, nel quale* VOI *lo avvolgete;* VOI, *che ſparſo avendo d'ogn' intorno alta maraviglia di Voſtre Azioni, coſtringete gli Uomini a dir di* VOI *con più ragione, che non fu detto di alcuno degli antichi Ceſari, che colla Giuſtizia, e*

*Cle-*

*Clemenza dell' Imperio onorate l'umana natura, e rappresentate la divina. Lascio a quelle, che gelose delle glorie del nostro sesso conserveranno a Posteri le Vostre Gesta, l'esprimere, come all' esimia bellezza del corpo rimirinsi in* VOI *accoppiate ad una, ad una tutte le virtù, e sopra tutto lascio loro il celebrare la forza del vostro Ingegno, l' Incomparabile Vostro Valore, l'ampia Vostra Sufficienza, e quella invitta Costanza, che ristorata, dirò così, dalle stesse sventure, e da pericoli stessi, le cose Vostre nel principio del regno da nemico Fato travagliate, e quasi oppresse ritornò liete, e felici. Non si rimarranno esse pure di far conoscere la dolcezza de' Vostri costumi, l'Umanità Vostra, e la generosa Attenzione, colla quale fra lo strepito ancora, e il tumulto dell' armi proteggete, e ravvivate gli studj, e l'arti, onde si nutre il pubblico bene, e si accendono utilmente gli animi degli Uomini. Sin da primi anni occuparono le Scienze la Vostra*

*Men-*

*Mente, e nissuna fra queste è a* VOI *straniera. Vi á ora da quelle distolto la cura de' Popoli, ed è sembrato poco al Cielo, che foste la più dotta del Vostro Secolo. Ma non è in* VOI *però men fervido l'amore del Vero, e perciò chi lo ricerca sommamente distinguete, e favorite. Degnatevi adunque,* SACRA CESAREA REAL MAESTA', *clementissimamente riguardare questa mia fatica, e come opera, che in se raccoglie tutti i più luminosi progressi dell' Intelletto umano, e come quel tributo, che per me poteva offrirsi maggiore alla gloria del Vostro Regno, che non per altro par, che richiami la memoria delle Eroine, che altrove regnarono, che per maggiormente al confronto esaltare la* MAGNANIMITA', PRUDENZA, E FORTUNA VOSTRA; *e se il Musico Volume, che la Sorella mia á avuto l'onore di presentarvi, è stato tanto avventuroso di sciogliere al canto la Vostra Voce, abbia questo la sospirata sorte di addoprare alcuna volta la Vostra Penetrazione,*

*zione , e Sagacità . Altro non rimanendomi, che d'implorarvi dal Cielo lunghissima Vita, onde deriverà la stabile felicità di tante a* VOI *soggette Nazioni, al Vostro Trono umilissimamente mi prostro*

DELLA S. C. R. MAESTA' VOSTRA

*Umilissima, obbedientissima, fedelissima Serva, e Suddita*
Maria Gaetana Agnesi .

# AL LETTORE.

On avvi alcuno, il quale informato essendo delle Matematiche cose, non sappia altresì quanto, in oggi spezialmente, sia necessario lo studio dell'Analisi, e quali progressi si sieno con questa fatti, si facciano tuttora, e possano sperarsi nell' avvenire; che però non voglio, nè debbo trattenermi qui in lodando quella scienza, che punto non ne abbisogna, e molto meno da me. Ma quanto è chiara la necessità di lei, onde la Gioventù ardentemente s'invoglj di farne acquisto, grandi altrettanto sono le difficoltà, che vi s'incontrano, sendo noto, e fuor di dubbio, che non ogni Città, almeno nella nostra Italia, â persone, che sappiano, o vogliano insegnarla, e non tutti ânno il modo di andar fuori della Patria a cercar-



ne

ne i Maeſtri . Io lo ſo per prova , ed ingenuamente il confeſſo , mentre con tutto lo ſtudio , ch'io mi ſono sforzata di fare da me medeſima ſoſtenuto dalla più forte inclinazione per queſta ſcienza , mi troverei tuttavia intricata nel gran labirinto d'inſuperabili difficoltà , ſe tratta non me n'aveſſe la ſicura guida , e ſaggia direzione del dottiſſimo Padre Don Ramiro Rampinelli Monaco Olivetano ora Profeſſore di Matematica nella Regia Univerſità di Pavia , a cui mi riconoſco altamente debitrice di tutti que' progreſſi (quali eſſi ſieno) de' quali è ſtato capace il mio picciol talento , le di cui lodi io tralaſcio come ſuperflue ad un Soggetto sì celebre , e ſpezialmente per non offendere la nota , e forſe troppo rigida di lui modeſtia . Al ſopraccennato incomodo poſſono rimediare , non v'â dubbio , in parte i buoni libri , quando eſſi ſieno con quella chiarezza , che baſta ſcritti , e con quel metodo , che pur troppo è neceſſario ; quindi è , che quantunque le coſe Analitiche ſieno tutte pubblicate con le ſtampe , pure perchè eſſe ſono ſcollegate , ſenz' ordine , e ſparſe quà , e là nell' opere di molti Autori , e principalmente negli Atti di Lipſia , nelle Memorie dell' Accademia di Parigi , ed in altri Giornali , coſicchè non potrebbe certamente un Principiante ridurre a metodo le materie , quando anche egli foſſe di tutti i libri fornito , pensò il rinomato Padre Renau al comune vantaggio , e die-

de

de alla luce l'utiliſſimo libro *de L'Analiſe demontrée*, opera degna di tutte quelle lodi, che maggiori ſi poſſono. Dopo di che ſembrerà forſe affatto inutile, che compariſcano queſte mie Inſtituzioni, avendo altri già da molto tempo così largamente proveduto all' altrui biſogno. Ma ſu queſto punto io prego il corteſe Lettore a riflettere, che creſcendo le ſcienze di giorno in giorno, dopo l' edizione del lodato libro moltiſſimi, ed importantiſſimi ſono ſtati i nuovi ritrovamenti inſeriti dai loro Autori in diverſe opere, come era ſucceduto degli anteriori; quindi per iſcemare agli Studioſi la fatica di andare fra tanti libri ripeſcando i metodi di recente invenzione, mi ſembravano utiliſſime, e neceſſarie nuove Inſtituzioni di Analiſi. Le nuove ſcoperte m'ânno obbligata ad un'altra diſpoſizione di coſe, e ben ſa chi pon mano in sì fatte materie, quanto ſia difficile il ritrovare quella, che ſia dotata della dovuta chiarezza, e ſemplicità, omettendo tutto il ſuperfluo, ſenza laſciare coſa alcuna, che eſſer poſſa utile o neceſſaria, e che proceda con quell'ordine naturale, in cui forſe conſiſte la miglior iſtruzione, ed il maggior lume. Queſto naturale ordine io ô certamente ſempre avuto in viſta, e l'ô ſommamente procurato, ma non ſo poi ſe sarò ſtata baſtantemente fortunata per conſeguirlo.

Nell' atto poi di maneggiare varj metodi, mi si sono parate alla mente alcune estensioni, e parecchie diverse cose, le quali per avventura, non saranno prive di novità, e d'invenzione: a queste darà il benigno Lettore quel peso, che a lui sembrerà, non intendendo io di raccoglier lodi, contenta di essermi con sodo, e vero piacere divertita, e di aver procurato di giovare altrui.

Nel Tomo secondo per entro il Calcolo Integrale ritroverà il Lettore un Metodo affatto nuovo per li Polinomj, nè in luogo alcuno prodotto; questo è del celebre, e non mai abbastanza lodato Signor Conte Jacopo Riccati Cavaliere di singolarissimo merito nelle scienze tutte, e ben noto al mondo letterario. 'A egli voluto fare a me quella grazia nel comunicarmelo, che io non meritava, ed io rendo a lui, ed al Pubblico quella giustizia, che si conviene.

Finalmente, siccome non è stata mia mente da principio il pubblicar colle stampe la presente opera da me cominciata, e proseguita in Lingua Italiana per mio particolar divertimento, o al più per istruzione d'alcuno de' miei minori fratelli, che inclinato fosse alle matematiche facoltà, nè essendomi determinata di darla al Pubblico, che dopo di esser già molto avvanzata l'opera, e pervenuta a considerabile volume;

me ; mi ſono perciò diſpenſata dal tradurla in Latino Idioma ( comecchè da alcuni credaſi più convenire a tal materia ) sì per l'autorevole eſempio di tanti celebri Matematici Oltramontani , ed Italiani ancora , le di cui opere nella loro natìa favella vanno a comune vantaggio ſtampate , sì pel naturale mio rincreſcimento alla materiale fatica di traſcrivere in Latino ciò , che aveva di già ſcritto in Italiano . Nè intendo però farmi carico di quella purità di lingua , che lodevolmente viene praticata in materie da queſta diverſe , avendo io avuto in mira più , che ogni altra coſa , la neceſſaria poſſibile chiarezza .

*Die 26. Novembris 1748.*

*I M P R I M A T U R.*

*Fr. H. Todeschini Inquisitor Generalis Mediolani.*

*F. Curionus Archipresbyter S. Eusebii pro Eminentiss. & Reverendiss. D. D. Card. Archiepiscopo.*

*Vidit Julius Caesar Bersanus pro Excellentiss. Senatu.*

# INDICE DE' CAPI

## DI TUTTA L'OPERA

## TOMO I.

## LIBRO PRIMO

*Dell' Analisi delle Quantità finite.*

## TOMO II.

## LIBRO SECONDO

### *Del Calcolo Differenziale.*



## LIBRO TERZO

### *Del Calcolo Integrale.*



CAPO

## LIBRO QUARTO

### *Del Metodo Inverso delle Tangenti.*

# INSTITUZIONI ANALITICHE

## LIBRO PRIMO

### *Dell' Analisi delle Quantità finite.*

L'Analisi delle quantità finite, che comunemente chiamasi Algebra Cartesiana, è un metodo, con cui trattando quantità finite si sciolgono i Problemi; cioè da certe quantità, e condizioni date e cognite, si viene in cognizione d'altre incognite, e che si cercano, per mezzo di alcune operazioni, e metodi, che parte a parte mi propongo di spiegare ne' seguenti Capi.

A CAPO

# C A P O I.

## *Delle primarie Notizie, ed Operazioni dell' Analiſi delle Quantità finite.*

1. LE primarie operazioni di queſt' Algebra ſono le ſteſſe dell' Aritmetica comune, cioè la Somma, la Sottrazione, la Moltiplicazione, la Diviſione, e l' Eſtrazione delle Radici; ma con queſta differenza, che nell' Aritmetica comune ſi adoprano i numeri, ed in queſta le ſpecie, o ſia le lettere dell' Alfabeto, con le quali ſi denominano, e ſi calcolano le quantità in aſtratto, di qual ſorta eſſe ſiano, geometriche, o fiſiche, come Linee, Superficie, Corpi, Forze, Reſiſtenze, Velocità ec.; e però queſta tal ſorta di Aritmetica chiamaſi Algoritmo delle quantità, o Aritmetica ſpecioſa; ed è ben queſta molto più eccellente di quella, tutto che le operazioni ſieno le ſteſſe, ſi perchè queſte quantità non ſi confondono tra loro nelle operazioni, come le numeriche, ſi ancora perchè con la ſteſſa facilità ſi trattano nel calcolo le quantità note, e le incognite; e finalmente perchè le dimoſtrazioni analitiche ſono generali, ed a qualunque caſo applicabili, la dove le aritmetiche ſono particolariſſime, ed in ogni diverſo caſo è neceſſaria una nuova dimoſtrazione.

2. Ma delle Quantità altre ſono poſitive, cioè maggiori del nulla, altre minori del nulla, e però negative. Per

Per cagion d'esempio: I Beni, che si posseggono, sono positivi, ma quelli, che ad altri si debbono, sono negativi, perchè dai positivi s'hanno a sottrarre, e ne diminuiscono la somma, e però siccome sono quantità positive i Capitali, che uno abbia, così sono quantità negative i Debiti. Similmente se un Mobile diretto verso uno scopo, o meta del suo viaggio descriva uno spazio, sarà questo spazio positivo; ma se si porterà verso la opposta parte, descriverà uno spazio, che relativamente alla meta, verso cui doveva andare, sarà negativo. Quindi in Geometria se una linea condotta da una parte si assuma per positiva (il che è arbitrario) sarà negativa la linea condotta verso la parte opposta.

3. Le quantità positive si distinguono in algebra dalle negative per mezzo di certi segni a loro prefissi; alle positive si prefigge il segno $+$, che dicesi *più*, alle negative il segno $-$, che dicesi *meno*; e quando una quantità, che o sia posta sola, o in una serie di altre sia la prima, non abbia prefisso segno alcuno, s'intende sempre affetta dal segno positivo. Il segno $\pm$, a cui è contrario l'altro $\mp$, è segno ambiguo, e significa il più ed il meno, cioè il positivo ed il negativo, di modo che, per esempio, $\pm a$ vorrà dire, che la quantità $a$ si può assumere e positiva, e negativa. Il segno $=$ significa eguaglianza, e però $a=b$ vorrà dire, che $a$ sia eguale a $b$; siccome $a > b$ significa, che $a$ sia maggiore di $b$, ed $a < b$, che $a$ sia minore di $b$. L'eguaglianza poi delle ragioni, cioè la

proporzione geometrica di tre, o quattro quantità si esprimerà così $a$, $b$ :: $b$, $c$ se saranno tre, e vorrà dire, che la ragione di $a$ alla $b$ è eguale a quella di $b$ alla $c$; ed $a$, $b$ :: $c$, $d$ vorrà dire, che $a$ è alla $b$, come $c$ a $d$. Finalmente il segno $\infty$ significa l'infinito, e però $a = \infty$ significherà, che $a$ sia eguale all'infinito, cioè che sia quantità infinita.

4. Quantità semplice, incomplessa, o di un sol termine è quella, che è espressa da una, o più lettere, ma tra loro non distinte e separate da segno alcuno, come $a$, $ab$, $aac$ ec., così all'opposto è quantità composta e di più termini quella, che è espressa da più lettere tra loro separate da' segni, come $a + b$, $aa - ff + hh$, ec.; e però $a + b$ sarà di due termini, $aa - ff + hh$ di tre, ec.

*Della Somma delle Quantità semplici intiere.*

5. Le quantità semplici si sommano tra loro con lo scrivere una dopo l'altra, lasciando a ciascuna di loro quel segno, che hanno. Abbiasi da sommare $a$ con $b$ con $c$, sarà la somma $a + b + c$; abbiasi da sommare $a$ con $- b$, sarà la somma $a - b$; abbiasi da sommare $a$ con $a$ con $b$ con $b$, sarà la somma $a + a + b + b$; ma quì avvertasi, che $a + a$ è lo stesso che $2a$, e $b + b$ è lo stesso che $2b$; e però la somma sarà $2a + 2b$. Quindi per sommare le quantità espresse dalle medesime lettere, basterà alla stessa lettera prefiggere tal numero, che contenga tante unità, quante volte essa è posta; e però la somma di $ac$ con $ac$ con $ac$,

cioè

cioè $ac + ac + ac$ farà $3ac$, e questo numero si chiama coefficiente numerico. Che se le quantità da sommarsi dalle stesse lettere denominate averanno in oltre coefficienti numerici, si sommino essi coefficienti con la regola ordinaria dell'aritmetica; così la somma di $2a$ con $5a$ con $b$ con $4b$ farà $7a + 5b$; così la somma di $a$ con $3b$ con $-2c$ con $7c$ con $5a$ farà $a + 3b - 2c + 7c + 5a$, ma $a + 5a$ fanno $6a$, e $-2c + 7c$ fanno $5c$, dunque la somma farà $6a + 3b + 5c$.

*Della Sottrazione delle Quantità semplici intere.*

6. Per sottrarre una quantità da un'altra si muta il segno a quella, che si deve sottrarre, e col segno mutato si scrive presso l'altra. Per sottrarre $b$ da $a$ si scriva $a - b$; dove avvertasi, che se $a$ farà quantità maggiore di $b$, il residuo della sottrazione, cioè la differenza farà positiva; e se $b$ farà maggiore di $a$, essa differenza farà negativa. Per sottrarre $aff$ da $bbc$, si faccia $bbc - aff$; per sottrarre $2a$ da $5a$, si faccia $5a - 2a$; ma cinque $a$ meno due $a$ fanno tre $a$, adunque il residuo farà $3a$; per sottrarre $-b$ da $a$, si scriva $a + b$. Nè paja strano, che nel sottrarre $-b$ quantità negativa essa divenga positiva, onde il residuo sia $a + b$; imperciocchè il sottrarre una quantità da un'altra è lo stesso, che il cercare la differenza tra esse quantità; ora la differenza tra $a$, e $-b$ è appunto $a + b$ in quella guisa, che la differenza tra un capitale di cento scudi e un debito di cinquanta è cento cinquanta; perchè dall'avere

cento

cento all'avere nulla v'è differenza di cento , e dall'avere nulla all'avere cinquanta di debito vi è cinquanta di differenza; adunque dal capitale di cento al debito di cinquanta vi farà differenza di cento cinquanta. Così, per la ftessa ragione, a fottrarre $b$ da $-a$ fi fcrive $-a-b$; e per fottrare $-b$ da $-a$ fi fcrive $-a+b$.

*Della Moltiplicazione delle Quantità femplici intere.*

7. Le quantità femplici fi moltiplicano con lo fcrivere l'una unitamente all'altra fenza alcun fegno frappofto, e ciò che rifulta chiamafi il prodotto, ficcome chiamanfi i moltiplicatori le quantità, che tra loro fi moltiplicano. Ma intorno al fegno , che devefi prefiggere ad effi prodotti, è regola generale, che fe le quantità moltiplicantefi fono ambe pofitive, o ambe negative, al prodotto fi prefigge fempre il fegno pofitivo; fe una di effe, qualunque fiafi, è pofitiva, l'altra negativa, al prodotto fi prefigge fempre il fegno negativo. La ragione di ciò è, che la moltiplicazione altro non è, che una proporzione geometrica, il di cui primo termine fia l'unità; il fecondo, e terzo termine le due quantità, che devonfi moltiplicare ; ed il quarto il prodotto, e per tanto pofti in ferie l'unità per primo termine, l'uno de' moltiplicatori per fecondo, l'altro moltiplicatore per terzo; poichè il quarto, per la natura della proporzione geometrica , deve effere moltiplo del terzo, come il fecondo è moltiplo del primo; fe il fecondo, e terzo termine fono pofitivi , cioè fe, per efem-

esempio, è 1, $a$ :: $b$, al quarto, essendo l'unità, cioè il primo positivo, dovrà pure essere positivo il quarto. Sia negativo il secondo, e positivo il terzo, cioè sia 1, $-a$ :: $b$, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo negativo il secondo, dovrà pure il quarto essere negativo. Sia positivo il secondo, negativo il terzo, cioè sia 1, $a$ :: $-b$, al quarto; dovendo il quarto essere moltiplo del terzo, come il secondo è moltiplo del primo, ed essendo il secondo, ed il primo positivi, ed il terzo negativo, non potrà il quarto essere se non negativo. Sieno finalmente il secondo, ed il terzo negativi, cioè sia 1, $-a$ :: $-b$, al quarto; essendo il secondo moltiplo negativo del primo, bisognerà che il quarto sia moltiplo negativo del terzo; ma il terzo è negativo, dunque dovrà il quarto essere positivo. Adunque il prodotto di $a$ in $b$ sarà $ab$; quello di $a$ in $-b$ sarà $-ab$; di $-a$ in $b$ sarà pure $-ab$; di $-a$ in $-b$ sarà $ab$; di $a$ in $b$ in $c$ sarà $abc$; di $a$ in $-b$ in $c$ sarà $-abc$, perchè $a$ in $-b$ darà $-ab$, e $-ab$ in $c$ darà $-abc$; ed il prodotto di $-a$ in $-b$ in $c$ sarà $abc$.

Se le quantità da moltiplicarsi avessero dei coefficienti numerici, si moltiplicano essi coefficienti con la solita regola de' numeri, ed il prodotto si prefigge al prodotto delle lettere; onde il prodotto di $6a$ in $-8bc$ sarà $-48abc$; il prodotto di $2a$ in $-2b$ in $-3c$ sarà $12abc$, e così degl' altri ec.

8. Ora poichè il prodotto di $a$ in $a$ è $aa$; di $a$ in $a$ in $a$, o di

o di $aa$ in $a$ è $aaa$; di $a$ in $a$ in $a$ in $a$, o sia di $aaa$ in $a$ è $aaaa$, e così successivamente; per non replicare tante volte la medesima lettera si suole scrivere $a^2$ in luogo di $aa$, $a^3$ in luogo di $aaa$, $a^4$ in luogo di $aaaa$, e così degl'altri; cioè scrivendo sopra la lettera tal numero, che contenga tante unità, quante volte dovrebbe essere replicata essa lettera, e tale numero si chiama l'esponente; si suole però scrivere indifferentemente tanto $aa$, quanto $a^2$; non così di prodotto maggiore.

9. Comecchè il prodotto di un numero moltiplicato in se stesso si chiama il quadrato di quel numero, o sia la seconda potestà, e se questo prodotto di nuovo si moltiplica nello stesso numero, il nuovo prodotto si chiama il cubo, o la terza potestà dello stesso numero, ed il prodotto del cubo nel numero si chiama il quadrato quadrato, o la quarta potestà, e così successivamente; così pure $a$ moltiplicato in $a$, cioè $aa$ si chiama il quadrato di $a$, o la seconda potestà di $a$, $a^3$ il cubo, o terza potestà, $a^4$ la quarta ec. Sarà dunque assai diverso $2a$ da $a^2$, essendo il primo la somma di $a$ con $a$, cioè $a+a$, ed il secondo il quadrato di $a$, e così si dica di $3a$ ed $a^3$, di $4a$ ed $a^4$ ec. Ma poichè il prodotto di $+$ con $+$, e di $-$ con $-$ è sempre positivo, ne viene, che tanto il quadrato di $a$, quanto di $-a$ sarà sempre $aa$ quantità positiva; all'opposto il cubo di $a$ sarà bensì positivo, ma sarà negativo, cioè $-a^3$ il cubo di $-a$, perchè $-a$ in $-a$ fa $aa$, ed $aa$ in $-a$ fa $-a^3$. Così sarà positiva la quarta potestà tanto di $a$, quanto di

$-a$;

$-a$; e generalmente quando l'esponente della potestà, a cui si vuole elevare la data quantità, sia numero pari, o sia positiva, o sia negativa la quantità, ciò che risulta sarà sempre positivo; e quando l'esponente sia dispari, se la quantità è positiva, ciò che risulta sarà positivo, e sarà negativo quando la quantità sia negativa.

*Della Divisione delle Quantità semplici intere.*

10. La divisione è un'operazione opposta alla moltiplicazione, e ciò, che questa compone, quella risolve; poichè $ab$ è il prodotto di $a$ in $b$, così dividendo $ab$ per $a$ si avrà $b$, e dividendo per $b$ si avrà $a$; dividendo $abc$ per $bc$ avrassi $a$, e dividendo per $a$ avrassi $bc$, e dividendo per $c$ avrassi $ab$ ec. La quantità da dividersi si chiama il dividendo; quella, per cui si divide, si chiama il divisore; e ciò, che risulta dalla divisione, dicesi il quoziente. Adunque ogni qualvolta nel dividendo, e nel divisore vi sono le stesse quantità, si tolgano esse in quel modo, in cui sono nel divisore, dal dividendo cancellandole; e ciò, che rimane, sarà il quoziente, quindi se si divida $aa$ per $a$, il quoziente sarà $a$; se si divida $a^3$ per $a$, il quoziente sarà $aa$; se si divida $a^3 b^3$ per $aa\,bb$, il quoziente sarà $ab$; che se in oltre il dividendo, e divisore avessero coefficienti numerici, si dividano essi con la regola ordinaria dell'aritmetica, ed il quoziente numerico si prefigga al quoziente letterale, e però dividendo $3a^3 b^3$ per $3b^3$, il quoziente sarà $a^3$; dividendo $56aab^3$ per $8ab$, il quoziente sarà $7abb$; e quì notisi,

che qualora la quantità da dividersi sia la stessa del divisore, come sarebbe a dividere $b$ per $b$, $7a^3$ per $7a^3$ ec., il quoziente è l'unità; e la ragione è chiara, perchè il dividere è il ricercare quante volte il divisore entri ovvero sia nel dividendo.

11. Quando poi il dividendo, e divisore non abbiano quantità o lettera comune, per cui possa farsi la divisione nel modo suddetto, come sarebbe a dividere $a$ per $b$, $a^3$ per $bc$, $5aabb$ per $2cc$ ec., si scrivono così $\frac{a}{b}$, $\frac{a^3}{bc}$, $\frac{5aabb}{2cc}$ ec., cioè il dividendo al di sopra, ed il divisore al di sotto d'una lineetta, e si intende, che $a$ debbasi dividere per $b$, $a^3$ per $bc$ ec., e queste chiamansi frazioni; la quantità poi sopra la lineetta dicesi il Numeratore, quella di sotto il Denominatore. Che se alcune delle lettere del divisore, ma non tutte, fossero comuni con la quantità da dividersi, si tolgano le comuni dall'uno, e dall'altra, e del rimanente se ne formi una frazione; così dividendo $a^3bb$ per $5abcc$, sarà il quoziente $\frac{a^2b}{5cc}$; dividendo $10ab^3$ per $15bcc$, sarà il quoziente $\frac{2abb}{3cc}$ ec.

12. Ma perchè può essere positivo, o negativo ed il dividendo, ed il divisore, è necessario in ciascuna combinazione de' casi fissare la regola per lo segno da prefiggersi al quoziente. Questa è la stessa di quella, che serve per la moltiplicazione, vale a dire, che se il dividendo, ed il divisore averanno ambi il medesimo segno positivo, o negativo,

tivo, il quoziente sarà sempre positivo, e se averanno segni contrarj, il quoziente sarà negativo. La dimostrazione dipende da quella de' segni della moltiplicazione; imperciocchè siccome la moltiplicazione è una proporzione, il di cui primo termine sia l'unità; il secondo, ed il terzo i due moltiplicatori; ed il quarto il prodotto; così la divisione è la stessa proporzione, ma inversa, il di cui primo termine è il dividendo; il secondo il divisore; il terzo il quoziente; ed il quarto l'unità. Abbiasi da dividere $\pm ab$ per $\pm b$, sarà dunque la proporzione $\pm ab, \pm b :: *a, 1$ (pongo al terzo termine, cioè al quoziente il segno $*$, non sapendosi per ora se debba essere positivo, o negativo) ora considerata questa proporzione, come quella della moltiplicazione, ma inversamente posta, si sa che essendo positivo il secondo termine $b$, non potrà essere positivo il primo $ab$ se non sia positivo il terzo $a$; ed essendo negativo il secondo $b$, non potrà essere negativo il primo $ab$ se non sia positivo il terzo $a$; e però nella divisione quando sieno positivi, o negativi i due primi, cioè il dividendo, ed il divisore, bisognerà che sia positivo il terzo, cioè il quoziente. Istessamente pure non può nella stessa serie, o proporzione essere positivo il secondo $b$, e negativo il primo $ab$, o pure negativo il secondo $b$, e positivo il primo $ab$ se non sia negativo il terzo $a$; adunque nella divisione essendo positivo il dividendo, e negativo il divisore, o pure all' opposto, dovrà necessariamente essere negativo il quoziente.

13. Per questa ragione sarà dunque lo stesso scrivere, per esempio, $\frac{a}{-b}$, come $\frac{-a}{b}$, imperciocchè se $a$ positivo devesi dividere per $b$ negativo, dunque il quoziente deve essere negativo; come pure è lo stesso scrivere $\frac{-a}{-b}$, ed $\frac{a}{b}$.

*Della Estrazione delle Radici dalle Quantità semplici intere.*

14. Come evvi nelle potestà il quadrato, il cubo, la quarta potestà, la quinta ec.; così tra le radici vi è la quadrata o sia seconda, la cubica o sia terza, la quarta, la quinta ec. La denominazione della radice si chiama il di lei indice, e però l'indice della radice quadrata, o sia seconda è il due; della cubica, o sia terza il tre; della quarta il quattro ec.; e per cavare la radice da una data quantità devesi ritrovare quell'altra quantità, la quale moltiplicata in se stessa tante volte una meno, quante sono le unità nell'indice della radice, abbia prodotta la quantità proposta; così $a$ sarà la radice quadrata di $aa$, la cubica di $a^3$, la quarta di $a^4$ ec.; istessamente la radice quadrata di $aabb$ sarà $ab$; di $16aabbcc$ sarà la radice quadrata $4abc$; la cubica di $27a^3x^3$ sarà $3ax$, e così dell'altre.

15. E poichè il prodotto del meno col meno è sempre positivo, come di sopra si è veduto, quindi è, che la radice quadrata di $aa$ sarà tanto $a$, quanto $-a$, cioè $\pm a$; non così della cubica, la quale sarà positiva se sia positivo il cubo, e sarà negativa se sia quello negativo, poichè il cubo di $a$ sarà $a^3$, e $-a^3$ quello di $-a$; bensì la radice

quarta

quarta farà e positiva, e negativa; e generalmente parlando, la radice d'indice pari farà sempre e positiva, e negativa; d'indice dispari farà positiva se positiva la quantità proposta, e negativa se sia quella negativa. E perchè, per la stessa natura de' segni nella moltiplicazione, nessuna quantità positiva, o negativa può mai generare potestà negativa d'esponente pari; così è impossibile ritrovare radice d'indice pari di quantità negativa. Queste tali radici d'indice pari di quantità negativa si chiamano impossibili, o immaginarie; farà dunque immaginaria la radice quadrata di $-aa$, la quarta di $-a^4$, la quadrata, e sesta di $-a^6$ ec.; e farà vera, e reale la radice terza di $-a^3$, la quinta di $-a^5$ ec.

16. Ma il più delle volte la proposta quantità, di cui si vuole la radice, non farà un quadrato, un cubo, o altra potestà nata dalla moltiplicazione di quantità razionale in se stessa, ma farà un prodotto d'altra natura, come $ab$, $abc$ ec.; in questi casi si fa uso di questo segno $\surd$, che chiamasi vincolo radicale, onde $\sqrt[2]{ab}$, o semplicemente $\sqrt{ab}$ vorrà dire radice quadrata di $ab$, $\sqrt[3]{abc}$ vorrà dire radice cuba di $abc$, e così $\sqrt[4]{\ }$ radice quarta, $\sqrt[5]{\ }$ radice quinta ec., e queste tali quantità affette dal vincolo radicale si chiamano Irrazionali.

*Della Somma delle Quantità composte intere.*

17. Dalla somma, o sottrazione delle quantità semplici nascono le composte. Per sommare queste pure basta scriverle una dopo l'altra con que' segni, che hanno. Per sommare adunque $a+b$ con $c-d$, si scriva $a+b+c-d$; per sommare $2aa-xx$ con $3cc+2yy$, si faccia $2aa-xx+3cc+2yy$; per sommare $aa-xx$ con $bb+xx+yy$, si faccia $aa-xx+bb+xx+yy$; ma quì osservisi, che $-xx$ e $+xx$ si elidono, e distruggono, adunque cancellati questi, la somma sarà $aa+bb+yy$; per sommare $2aa-5bb$ con $aa+2bb+yy$, si scriva $2aa-5bb+aa+2bb+yy$; ma $2aa+aa$ fanno $3aa$, e $-5bb+2bb$ fanno $-3bb$, adunque la somma sarà $3aa-3bb+yy$.

*Della Sottrazione delle Quantità composte intere.*

18. Si mutino i segni alla quantità, che si vuol sottrarre, indi con i segni così mutati si scriva presso quella, da cui si vuol fare la sottrazione. Per sottrarre $c-d$ da $a+b$ si scriva $a+b-c+d$, e la ragione è chiara, imperciocchè sottraendo la sola quantità $c$, e scrivendo $a+b-c$ già si avrebbe sottratto troppo, perchè devesi sottrarre $c-d$, cioè la sola differenza di $c$ e di $d$, e però si avrebbe sottratto più del dovere, quanto è la quantità $d$, adunque per avere giusta la sottrazione bisognerà aggiungere essa quantità $d$, e scrivere $a+b-c+d$; lo stesso dicasi delle quan-

quantità più composte. Per sottrarre $a + 3b$ da $3a + 2b$, si scriva $3a + 2b - a - 3b$, e facendo la riduzione dei termini simili, poichè $3a - a$ è $2a$, e $2b - 3b$ è $-b$, sarà il residuo $2a - b$; per sottrarre $aa - 2ab$ da $2aa - ab$, si scriva $2aa - ab - aa + 2ab$, cioè $aa + ab$; per sottrarre $3ab - 2bc + 2cd$ da $5ab - 4bc + 2cd$, si scriva $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$, cioè facendo la riduzione, $2ab - 2bc$.

*Della Moltiplicazione delle Quantità composte intere.*

19. Intesa la regola del moltiplicare le quantità incomplesse, è facilissima quella delle composte. Si scriva adunque l'uno de' moltiplicatori sotto l'altro, all'uso dell' aritmetica volgare, indi per ciascun termine dell'uno de' moltiplicatori si moltiplichino tutti i termini dell'altro con la data regola delle quantità semplici, in quello, che risulta, si faccia al solito la riduzione de' termini simili, ed avrassi il prodotto. Abbiasi da moltiplicare $a + b - c$ per $x$; si scriva $\begin{array}{c} a + b - c \\ \underline{\quad x \quad} \\ ax + bx - cx \end{array}$, si moltiplichi per $x$ ciascun termine dell'altro moltiplicatore posto al disopra, e sarà il prodotto $ax + bx - cx$. Abbiasi da moltiplicare $2a + 3b - c$ per $3x - 2y$, si scriva $\begin{array}{c} 2a + 3b - c \\ \underline{3x - 2y \qquad\qquad\qquad} \\ 6ax + 9bx - 3cx - 4ay - 6by + 2cy \end{array}$, per lo termine $3x$ si moltiplichino tutti i termini della quantità posta al di sopra, indi si faccia lo stesso per lo termine $-2y$, e se altri termini vi fossero al di sotto si farebbe lo stesso;

ſteſſo; e ſarà il prodotto $6ax + 9bx - 3cx - 4ay - 6by + 2cy$. Nè importa, che l'operazione ſi cominci a deſtra, o a ſiniſtra riſpetto all'uno, ed all'altro de' moltiplicatori, ſiccome nulla importa, che di eſſi piuttoſto l'uno, che l'altro ſi ſcriva ſopra o ſotto, e che ſi ponga il tale o tal'altro termine per primo. Abbiaſi da moltiplicare $aa + xx$ per $aa - xx$, adunque ſi ſcriva

$$\begin{array}{r} aa + xx \\ aa - xx \\ \hline \end{array}$$

ed il prodotto ſarà $a^4 + aaxx - aaxx - x^4$

ma $aaxx - aaxx$ ſi elidono; adunque il prodotto ſarà $a^4 - x^4$.

Nelle moltiplicazioni lunghe, per maggior facilità di ridurre i termini ſimili, torna aſſai comodo lo ſcrivere eſſi termini ſimili, che nella moltiplicazione ſi generano, uno ſotto l'altro in queſta guiſa

ſi moltiplichi $4a^3 + 3aab - 2abb + b^3$

per $aa - 5ab + 6bb$

$$\begin{array}{l} 4a^5 + 3a^4b - 2a^3bb + aab^3 - 5ab^4 + 6b^5 \\ \qquad - 20a^4b - 15a^3bb + 10aab^3 - 12ab^4 \\ \qquad\qquad + 24a^3bb + 18aab^3 \end{array}$$

dove preſto ſi vede, che $3a^4b - 20a^4b$ fanno $-17a^4b$; che $-2a^3bb - 15a^3bb + 24a^3bb$ fanno $7a^3bb$; che $aab^3 + 10aab^3 + 18aab^3$ fanno $29aab^3$; che $-5ab^4 - 12ab^4$ fanno $-17ab^4$; e però il prodotto ſarà finalmente $4a^5 - 17a^4b + 7a^3bb + 29aab^3 - 17ab^4 + 6b^5$.

20. Alle volte è ſuperfluo il fare l'attual moltiplicazione nella guiſa, che ſi è detta, baſtando ſemplicemente l'indicarla, il che ſuole farſi per mezzo di queſto ſegno $\times$, e col

è col tirare una retta sopra ciascuno de' moltiplicatori, la quale si estenda sopra tutti que' termini, che entrano nella moltiplicazione; così $\overline{aa+xx} \times \overline{aa-xx}$ vorrà dire il prodotto di $aa+xx$ in $aa-xx$; ma nella quantità $\overline{aa+xx} \times \overline{aa-xx}$ $\pm a^4$ non essendo il termine $\pm a^4$ sotto la retta linea, non s'intende egli compreso nella moltiplicazione di modo, che così scrivendo vorrà dire il prodotto di $aa+xx$ in $aa-xx$, al quale prodotto è in oltre aggiunto, o sottratto $a^4$.

21. In quella guisa, che nelle quantità semplici il prodotto di $a$ in $a$ dicesi il quadrato di $a$, il prodotto di $aa$ in $a$ dicesi il cubo di $a$, il prodotto di $a^3$ in $a$ la quarta potestà ec.; così nelle quantità composte il prodotto, per esempio, di $a+b$ in $a+b$, o sia $\overline{a+b} \times \overline{a+b}$ dicesi il quadrato di $a+b$, il quale non volendosi formare attualmente colla moltiplicazione, si scriverà così $\overline{a+b}^2$; istessamente $\overline{a+b}^2 \times \overline{a+b}$ sarà il cubo, e si scriverà $\overline{a+b}^3$; $\overline{a+b}^3 \times \overline{a+b}$, o pure $\overline{a+b}^2 \times \overline{a+b}^2$ dicesi la quarta potestà, e si scrive $\overline{a+b}^4$; lo stesso intendasi delle quantità di più termini.

Per formare attualmente queste potestà, devesi moltiplicare in se la quantità, ed il prodotto nella stessa quantità successivamente tante volte una meno, quante unità contiene il numero dell'esponente di essa potestà, che si desidera. Ma per la seconda potestà, cioè per lo quadra-

 to,

to, ſi può abbreviare l'operazione così: Se la quantità è un binomio, cioè di due termini, come $a \pm b$; ſi faccia il quadrato del primo termine, indi ſe gli ſcrivano appreſſo i due rettangoli, cioè due volte il prodotto del primo termine nel ſecondo con quel ſegno, che porta la regola della moltiplicazione, e finalmente ſi aggiunga il quadrato del ſecondo termine. Così $\overline{a+b}^{2}$ ſarà $aa + 2ab + bb$; $\overline{a-b}^{2}$ ſarà $aa - 2ab + bb$; $\overline{-a-b}^{2}$ ſarà $aa + 2ab + bb$. Se la quantità foſſe un trinomio, cioè di tre termini, ſi ſcrivano in oltre i due rettangoli del primo termine nel terzo, e due altri rettangoli del ſecondo nel terzo (intendendo, che queſti rettangoli abbiano que' ſegni, che porta la moltiplicazione) e finalmente il quadrato del terzo termine. Così $\overline{a+b-c}^{2}$ ſarà egli $aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc$. Se la quantità ſarà un quadrimonio, cioè di quattro termini, ſi ſcrivano in oltre due volte i rettangoli de' primi tre termini nel quarto, con di più il quadrato di eſſo quarto termine ec.

22. Ma riſpetto alle quantità binomie può ſervire il ſeguente Canone generale non ſolo per elevarle al quadrato, ma a qualunque poteſtà $m$, intendendo per $m$ un qualunque numero. Sia dunque $p + q$ da elevarſi alla poteſtà $m$, ſarà eſſa

$$p^{m} + mp^{m-1}q + m \times \frac{\overline{m-1}}{2} p^{m-2} qq + m \times \frac{\overline{m-1}}{2} \times \frac{\overline{m-2}}{3} p^{m-3} q^{3}$$
$$+ m \times \frac{\overline{m-1}}{2} \times \frac{\overline{m-2}}{3} \times \frac{\overline{m-3}}{4} p^{m-4} q^{4}$$ ec., e così proſeguendo con la ſteſſa legge.

Deb-

Debbasi adunque fare il quadrato di $p+q$, in questo caso $m$ sarà 2, e però sostituito nel canone in luogo della $m$ il 2, sarà il primo termine $pp$; il secondo $2p^{2-1}q$, cioè $2pq$; il terzo $2\times\frac{\overline{2-1}}{2}p^{2-2}qq$, cioè $qq$ (non essendovi considerata la quantità $p$, perchè elevata alla potestà nulla si eguaglia all'unità, come si dimostrerà al numero 50.) il quarto $2\times\frac{\overline{2-1}}{2}\times\frac{\overline{2-2}}{3}\times p^{2-3}q^3$, ma $2-2$ è lo stesso che zero, adunque questo termine è moltiplicato per zero, e così pure ciascun de' susseguenti, onde saranno essi ancora zero, e però il canone terminerà col terzo termine, e sarà il quadrato ricercato $pp+2pq+qq$.

Si voglia la terza potestà di $p+q$; sarà $m=3$, quindi sarà zero il quinto termine coi susseguenti, e la ricercata potestà (fatta la sostituzione di 3 in luogo di $m$) $p^3+3ppq+3pqq+q^3$. Se la quantità da elevarsi sarà $p-q$, basterà porre il segno meno a tutti que' termini, ne' quali la $q$ è a potestà dispari.

Il suddetto canone serve non solo per lo binomio $p\pm q$, ma per qualunque altro ancora; e però si voglia la terza potestà di $2ax-xx$: si supponga $2ax=p$, e $-xx=q$, sarà $m=3$, indi nel canone in luogo di $p$, e delle potestà di $p$ si sostituisca $2ax$, e le corrispondenti sue potestà, lo stesso si faccia di $-xx$ in luogo di $q$, e delle sue potestà, e si ponga 3 in luogo di $m$, e sarà $8a^3x^3-12aax^4+6ax^5-x^6$.

Anzi potrà egli servire per qualunque polinomio, cioè per qualunque quantità composta di più termini, che di due. Sia il trinomio $a+b-c$ da elevarsi alla terza potestà, sarà dunque $m=3$; si ponga $a=p$, e $b-c=q$, indi surrogato $a$, e le sue potestà in luogo di $p$, e delle sue potestà, siccome in luogo di $q$, e sue potestà sostituito $b-c$, e sue corrispondenti potestà, sarà $a^3+3aa\times\overline{b-c}$ $+3a\times\overline{b-c}^2+\overline{b-c}^3$, cioè $a^3+3aab-3aac+3abb-6abc$ $+3acc+b^3-3bbc+3bcc-c^3$.

*Della Divisione delle Quantità composte intere.*

23. Tre combinazioni, o siano tre diversi casi possono darsi intorno alla divisione delle quantità complesse; il primo quando sia complessa la quantità da dividersi, e semplice il divisore; il secondo quando sia semplice quella, e composto questo; il terzo quando siano composti e l'una, e l'altro. Quanto ai primi due casi basta far uso della regola delle quantità semplici. Nel primo caso si divida ciascun termine della quantità proposta per lo divisore, e nasceranno intieri, o rotti, o in parte intieri, ed in parte rotti, come porterà la natura della divisione nelle quantità semplici. Così dividendo $aa+ab-ac$ per $a$, avrassi $a+b-c$; dividendo $4ab-6bc+xx$ per $2b$, avrassi $2a-3c+\frac{xx}{2b}$; dividendo $4ab-cc+3xx$ per $3c$, avrassi $\frac{4ab-cc+3xx}{3c}$, o sia $\frac{4ab}{3c}-\frac{c}{3}+\frac{xx}{c}$. Nel secondo caso si scriva il divisore

sotto

fotto al dividendo, all'ufo delle frazioni, e fe in ciafcun termine del numeratore, e del denominatore vi farà qualche quantità comune, fi cancelli quefta; e ciò, che rimane, farà fempre una frazione. Dividendo però $3a^3b$ per $aa-ax+ab$, farà il quoziente $\frac{3a^2b}{a-x+b}$. Dividendo $6a^4$ per $2aa-2ax+2xx$, farà il quoziente $\frac{3a^4}{aa-ax+xx}$.

24. Nel terzo cafo fa d'uopo in primo luogo ordinare il dividendo, ed il divifore relativamente ad una qualche lettera, che fi crederà più a propofito, il che fi fa fcrivendo per primo termine e nel dividendo, e nel divifore quello, in cui quefta lettera fi trova alla maggior dimenfione o poteftà, per fecondo termine quello, in cui quefta fteffa lettera è alla poteftà più proffima; e così fucceffivamente fino a que' termini, che affatto non contengano effa lettera, i quali faranno gli ultimi. Così farebbe ordinata relativamente alla lettera $a$ la quantità $a^3+2aac-aab-3abc+bbc$, ed il divifore $a-b$. Che fe fi voleffe ordinare relativamente alla lettera $b$, fi fcriverebbe la quantità così: $bbc-3abc-aab+a^3+2aac$, ed il divifore così: $-b+a$.

Ciò pofto, la divifione fi fa in quefta maniera: Si divide il primo termine del dividendo per lo primo termine del divifore, ed il quoziente fi fcrive a parte; per quefto quoziente fi moltiplica tutto il divifore, ed il prodotto fi fottrae dal dividendo; fatta la fottrazione, e ridotti i ter-

termini, di nuovo si divide nella stessa maniera per lo primo termine del divisore il primo termine di ciò, che è rimasto nel dividendo, cioè del primo resto, e questo quoziente si scrive presso l'altro con quel segno, che deve avere; indi per questo secondo quoziente si moltiplica tutto il divisore, ed il prodotto si sottrae dal dividendo, cioè dal primo resto, ed in questa guisa operando si ripete il calcolo fino a tanto, che dalla sottrazione nulla rimanga, e la somma di tutti i quozienti parziali sarà il quoziente totale nato dalla divisione.

Sia da dividersi $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ per $a - b$. Si scriva la quantità da dividersi in ($A$), il divisore in ($B$); diviso $a^3$ per $a$, il quoziente sarà $aa$, che si scriva in ($D$), indi fatto il prodotto del quoziente nel divisore, e sottratto dal dividendo, rimarrà il primo resto ($M$). Si divida il primo termine $2aac$ di questo residuo ($M$) per lo stesso primo termine $a$ del divisore, e scrivasi il quoziente $2ac$ presso l'altro in ($D$), si sottragga dal primo resto ($M$) il prodotto di $2ac$ nel divisore ($B$), ed averassi il secondo resto ($N$). Si divida il primo termine $-abc$ di questo secondo resto per lo stesso termine $a$ del divisore, ed il quoziente $-bc$ si scriva in ($D$) vicino agl'altri, dal secondo resto ($N$) sottraggasi il prodotto di $-bc$ nel divisore, e nulla rimane; adunque il quoziente sarà $aa + 2ac - bc$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ($A$) | $a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc$ | ($B$) | $a - b$ |
| ($M$) | $2aac - 3abc + bbc$ | ($D$) | $aa + 2ac - bc$ |
| ($N$) | $-abc + bbc$ | | |

Sia

Sia da dividersi $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ per $a - b$. Si scriva il dividendo in ($A$), il divisore in ($B$), dividasi il primo termine $a^3$ per $a$, ed il quoziente $aa$ si scriva in ($D$), indi fatto il prodotto del quoziente nel divisore, e sottratto dal dividendo, rimarrà il primo resto ($M$); si divida il primo termine di questo resto ($M$), cioè $-2aab$ per lo stesso primo termine $a$ del divisore, e scrivasi il quoziente $-2ab$ presso l'altro in ($D$), sottraggasi dal primo resto ($M$) il prodotto di $-2ab$ nel divisore, e si avrà il secondo resto ($N$), si divida il primo termine $abb$ di questo secondo resto per lo stesso primo termine $a$ del divisore, ed il quoziente $bb$ si scriva in ($D$) accanto degl'altri, sottraggasi indi dal secondo resto ($N$) il prodotto di $bb$ nel divisore ($B$), e nulla rimane; adunque il quoziente totale sarà $aa - 2ab + bb$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ($A$) | $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ | ($B$) | $a - b$ |
| ($M$) | $- 2aab + 3abb - b^3$ | ($D$) | $aa - 2ab + bb$ |
| ($N$) | $abb - b^3$ | | |

Altro Esempio

Dividendo $2aa + 5ab + 2bb - ac - 2bc$, Divisore $a + 2b$
Primo resto $ab + 2bb - ac - 2bc$, Quoziente $2a + b - c$
Secondo resto $- ac - 2bc$

Altro Esempio

Divid. $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4$, Divisore $3dd - ee$
Primo resto $12d^3e + 3ddee - 4de^3 - e^4$, Quoz. $3dd + 4de + ee$
Secondo resto $3ddee - e^4$

Altro

Altro Esempio

Dividendo $4aa + 4ab - 2ac + bb - cc$ Divisore $2a + b$
Primo resto $2ab - 2ac + bb - cc$
Secondo resto $-2ac - cc$ Quoziente $2a + b - c$
Terzo resto $bc - cc$

Ma quì osservisi, che l'ultimo resto $bc - cc$ non è divisibile per $2a$, ed in conseguenza non può andare avanti l'operazione, rimanendo la frazione $\frac{bc - cc}{2a + b}$, e questo vuol dire, che la proposta quantità non è interamente divisibile per $2a + b$, ma solo in parte, e però sarà il quoziente in parte intero, ed in parte rotto, cioè $2a + b - c + \frac{bc - cc}{2a + b}$, o pure tutto rotto, scrivendo $\frac{4aa + 4ab - 2ac + bb - cc}{2a + b}$.

*Dell' Estrazione delle Radici dalle Quantità composte intere.*

25. Come nelle quantità semplici, così nelle composte la radice quadrata di una qualunque quantità è quella, che moltiplicata in se stessa â prodotta la quantità data; la cubica quella, che moltiplicata in se due volte, la quarta tre ec.

La maniera di cavare la radice quadrata nelle quantità complesse è la seguente, intendendo però, che prima sieno ordinati i termini relativamente ad una lettera secondo, che è stato detto al numero 24.

Sia la quantità $aa + 2ab + bb$, di cui si vuole la radice quadrata, che si scriva in ($A$); si cavi la radice quadrata dal

dal primo termine $aa$, e farà essa $a$, la quale si scriva in ($B$), si sottragga dalla quantità proposta ($A$) il quadrato di essa, cioè $aa$, ed il residuo si scriva in ($D$), indi si raddoppj la quantità $a$ scritta in ($B$), e si scriva in ($M$), e farà essa $2a$; per $2a$ si divida il primo termine di ($D$), ed il quoziente $b$ si scriva in ($B$), indi si moltiplichi il divisore $2a$ nel quoziente $b$, e si sottragga il prodotto dalla quantità ($D$), e di più da essa si sottragga il quadrato di $b$, e perchè nulla rimane, farà $a+b$ la radice cercata

($A$) $aa+2ab+bb$ ($B$) $a+b$
($D$) $2ab+bb$ ($M$) $2a$

Sia la quantità $a^4+6a^3b+5aabb-12ab^3+4b^4$. Si scriva in ($A$), e si estragga la radice quadrata dal primo termine, che è $aa$, e si scriva in ($B$), il quadrato di $aa$ sottraggasi dalla quantità ($A$), e rimane la quantità ($D$), si raddoppj $aa$, e si scriva in ($M$), e per esso raddoppiato, cioè per $2aa$, dividasi il primo termine del primo resto ($D$), ed il quoziente $3ab$ si scriva in ($B$), indi sottratto il prodotto di $3ab$ nel divisore $2aa$ con di più il quadrato di esso $3ab$ dal primo resto ($D$), rimarrà il secondo resto ($H$). Si raddoppj tutta la quantità ($B$), e si scriva in ($G$), per lo primo termine di essa si divida il primo termine di ($H$), ed il quoziente $-2bb$ si scriva in ($B$), e perchè sottratto il prodotto del quoziente nel divisore ($G$) con di più il quadrato dello stesso quoziente dalla quantità ($H$), nulla rimane, farà la quantità scritta in ($B$),

cioè $aa + 3ab - 2bb$ la radice, che ſi cerca.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(A)$ | $a^4 + 6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$ | $(B)$ | $aa + 3ab - 2bb$ |
| $(D)$ | $6a^3b + 5aabb - 12ab^3 + 4b^4$ | $(M)$ | $2aa$ |
| $(H)$ | $-4aabb - 12ab^3 + 4b^4$ | $(G)$ | $2aa + 6ab$ |

Ecco l'Operazione per altri Eſempj.

| | | |
|---|---|---|
| Sia | $y^4 + 4ay^3 - 8a^3y + 4a^4$ | Rad. $yy + 2ay - 2aa$ |
| Primo reſto | $4ay^3 - 8a^3y + 4a^4$ | $2yy$ |
| Secondo reſto | $-4aayy - 8a^3y + 4a^4$ | $2yy + 4ay$ |

Sarà adunque la radice quadrata $yy + 2ay - 2aa$

Sia la quantità

| | | |
|---|---|---|
| | $16a^4 - 24aaxx - 16aabb + 12bbxx + 9x^4$ | Rad. $4aa - 3xx - 2bb$ |
| I. reſto | $-24aaxx - 16aabb + 12bbxx + 9x^4$ | $8aa$ |
| II. reſto | $-16aabb + 12bbxx$ | $8aa - 6xx$ |
| III. reſto | $-4b^4$ | |

Con queſta operazione ſi arriva in fine all'ultimo reſto $-4b^4$, il quale non è diviſibile in alcun modo per $8aa$, come eſigge il metodo, che in queſto caſo non â luogo. Ciò vuol dire, che dalla quantità propoſta non ſi può attualmente eſtraere la radice quadrata, e però conviene ſervirſi del ſegno radicale, come di ſopra al numero 16.; lo ſteſſo facciaſi in ſimili caſi per altre radici cube, quarte ec., e così $\sqrt{aa + bb}$ vorrà dire la radice quadrata di $aa + bb$; $\sqrt[3]{aab - abb}$ vorrà dire la radice cuba di $aab - abb$ ec.

26. Riſpetto alle radici cube. Sia da eſtraerſi la radice cuba dalla quantità $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, che ſi ſcri-

ſcriva in ($A$). Si cavi la radice cuba dal primo termine $a^3$ della quantità propoſta, e ſi ſcriva in ($B$), ſi ſottragga il cubo di queſta, cioè $a^3$, dalla quantità ($A$), ed il reſiduo ſi ſcriva in ($D$), ſi faccia indi il triplo del quadrato di $a$, cioè $3aa$, e ſi ſcriva in ($M$), per eſſo ſi divida il primo termine del reſiduo ($D$), ed il quoziente $b$ ſi ſcriva in ($B$), per eſſo ſi moltiplichi il diviſore $3aa$, ed il prodotto con di più il triplo del quadrato di $b$ nella quantità $a$, ed il cubo di $b$ ſi ſottragga dal reſiduo ($D$); e perchè nulla rimane, ſarà $a + b$ la radice, che ſi cercava.

$$(A)\ a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \qquad (B)\ a + b$$
$$(D)\ \ 3aab + 3abb + b^3 \qquad (M)\ 3aa$$

Debbaſi eſtraere la radice cuba dalla quantità

$$z^6 + 6bz^5 - 40b^3z^3 + 96b^5z - 64b^6.$$

Si cavi la radice dal primo termine $z^6$, che ſarà $zz$, e ſi ſcriva in ($B$), ſottraggaſi il cubo di ($B$) dalla propoſta quantità ($A$), ed il reſiduo ſi ſcriva in ($D$), ſi faccia il triplo del quadrato di ($B$), e ſi ſcriva in ($M$), indi per eſſo ſi divida il primo termine della quantità ($D$), ed il quoziente $2bz$ ſi ſcriva in ($B$), ſottraggaſi poſcia il prodotto di $2bz$ nella quantità ($M$), e di più il triplo del quadrato di $2bz$ moltiplicato in $zz$ con il cubo di $2bz$ dal reſiduo ($D$), e ſcrivaſi il reſiduo in ($H$), facciaſi il triplo del quadrato di ($B$), che ſcrivaſi in ($G$), e per lo primo termine di eſſo ſi divida il primo termine della quantità ($H$), ed il quoziente $-4bb$ ſi ſcriva in ($B$), ſi moltipli-

chi questo quoziente nella quantità ($G$), ed il prodotto con di più il triplo del quadrato di $-4bb$ in $zz+2bz$, ed il cubo di $-4bb$ sottraggasi dalla quantità ($H$), e nulla rimane; onde sarà la radice cuba della quantità proposta tutta la quantità ($B$), cioè $zz+2bz-4bb$.

| | | | Radice cuba |
|---|---|---|---|
| ($A$) | $z^6+6bz^5-40b^3z^3+96b^5z-64b^6$ | ($B$) | $zz+2bz-4bb$ |
| ($D$) I. resto | $6bz^5-40b^3z^3+96b^5z-64b^6$ | ($M$) | $3z^4$ |
| ($H$) II. resto | $-12bbz^4-48b^3z^3+96b^5z-64b^6$ | ($G$) | $3z^4+12bz^3+12bbzz$ |

Nello stesso modo si farà intorno alla quantità

| | | | Radice cuba |
|---|---|---|---|
| ($A$) | $27y^6-54cy^5+144ccy^4-152c^3y^3+192c^4yy-96c^5y+64c^6$ | ($B$) | $3yy-2cy+4cc$ |
| ($D$) I. resto | $-54cy^5+144ccy^4-152c^3y^3+192c^4yy-96c^5y+64c^6$ | ($M$) | $27y^4$ |
| ($H$) II. resto | $108ccy^4-14$[illegible]$c^3y^3+192c^4yy-$[illegible]$c^5y+64c^6$ | ($G$) | $27y^4-36cy^3+12ccyy$ |

27. Per le radici quarte. Sia proposta la quantità $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, di cui si voglia la radice quarta. Si scriva in ($A$), e si cavi la radice quarta dal primo termine, che sarà $a$, e si scriva in ($B$), sottraggasi la quarta potestà di ($B$) dalla quantità ($A$), ed il residuo si scriva in ($D$), indi facciasi il quadruplo del cubo di $a$, e si scriva in ($M$), per esso si divida il primo termine della quantità ($D$), ed il quoziente $b$ si scriva in ($B$), dalla quantità ($D$) si sottragga il prodotto del quoziente $b$ nel divisore $4a^3$, e di più il sestuplo del quadrato di $b$ nel quadrato di $a$, ed il prodotto del quadruplo del cubo di $b$ nella quantità $a$, e finalmente il quadrato-quadrato o la

quarta

quarta poteſtà di $b$; e perchè nulla rimane, ſarà $a+b$ la radice cercata

$$(A)\ a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \quad (B)\ a+b$$
$$(D)\qquad 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \quad (M)\ 4a^3$$

28. Riſpetto alla radice quinta. Per vedere in quale maniera creſcano le operazioni da farſi, baſta formare la quinta poteſtà del binomio, per eſempio $a+b$, la quale ci darà regola, ſiccome la ſeconda, terza, e quarta poteſtà dello ſteſſo binomio ci â data regola per le radici quadrata, cuba, e quarta. Similmente ſi diſcorra delle radici ſeſta, ſettima ec.

### *Del Calcolo delle Frazioni ſemplici, e compoſte.*

29. Dalla diviſione delle quantità s'è veduto come naſcono le frazioni, o ſiano i rotti. Una frazione adunque indica una diviſione da farſi del numeratore per lo denominatore, onde ne viene, che ſe il numeratore ſarà lo ſteſſo del denominatore, come $\frac{a}{a}$, o pure $\frac{aa-bb}{aa-bb}$, ed altre ſimili, tali frazioni niente altro vorranno ſignificare, che l'unità, perchè di fatto dividendo $a$ per $a$, $aa-bb$ per $aa-bb$, il quoziente è l'unità. E perchè la moltiplicazione è un' operazione contraria alla diviſione, è chiaro, che un qualunque intero ſi può ridurre ad eſſere una frazione di qualſivoglia denominatore, ſe per la quantità, che deve eſſere il denominatore, ſi moltiplicherà, e ſi dividerà l'intero; così

così per ridurre l'intiero $a$ ad una frazione del denominatore $b$ ſi ſcriverà $\frac{ab}{b}$; per ridurre $a-b$ ad una frazione del denominatore $d$ ſi ſcriverà $\frac{ad-bd}{d}$; per ridurre $a+b$ ad una frazione del denominatore $c-d$ ſi ſcriverà $\frac{\overline{a+b}\times\overline{c-d}}{c-d}$, cioè $\frac{ac+bc-ad-bd}{c-d}$.

*Della Riduzione delle Frazioni all'eſpreſſione più ſemplice.*

30. Quando le frazioni ânno in ciaſcun termine del numeratore, e del denominatore la ſteſſa, o le ſteſſe lettere baſta cancellare nell'uno, e nell'altro le lettere comuni, avendo riguardo alle poteſtà loro, come diſſi nella diviſione al numero 10.; così $\frac{a^3bb}{ac}$ ſarà $\frac{aabb}{c}$; $\frac{ab^3}{abc}$ ſarà $\frac{bb}{c}$; $\frac{a^3b-x^3b}{ab-bb}$ ſarà $\frac{a^3-x^3}{a-b}$. Ma quando anche nel numeratore, e denominatore non vi ſiano le ſteſſe lettere, purchè l'uno, e l'altro ſieno moltiplicati per la ſteſſa quantità, ſaranno anco per eſſa diviſibili, ed in conſeguenza ſi potrà ridurre la frazione. Adunque $\frac{aac-aad}{cd-dd}$, che è appunto $\frac{aa\times\overline{c-d}}{d\times\overline{c-d}}$, ridotta ſarà $\frac{aa}{d}$; $\frac{\overline{aa+2ab}^2}{aab+2abb}$, o ſia $\frac{\overline{aa+2ab}\times\overline{aa+2ab}}{\overline{aa+2ab}\times b}$, ſarà ridotta $\frac{aa+2ab}{b}$; $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$, o ſia $\frac{\overline{aa-bb}\times\overline{c-d}}{d\times\overline{c-d}}$, ridotta ſarà $\frac{aa-bb}{d}$;

aac

$\frac{aac - aad - acd + add}{cd - da}$, o ſia $\frac{\overline{aa - ad} \times \overline{c - d}}{d \times \overline{c - d}}$, ridotta ſarà $\frac{aa - ad}{d}$ ec.

Generalmente adunque ogni qual volta la frazione è tale, che il numeratore, e denominatore ſieno ambi diviſibili per una ſteſſa quantità ( che in queſti caſi ſi chiama il loro comun diviſore ) facendo attualmente le diviſioni, i due quozienti daranno la frazione ridotta; ma avvertaſi, che ſe il comune diviſore non è il maſſimo, la frazione ſarà bensì ridotta, ma non alla più ſemplice eſpreſſione; così la frazione $\frac{a^3 - abb}{aac + abc}$, che è $\frac{a \times \overline{a + b} \times \overline{a - b}}{a \times c \times \overline{a + b}}$ può eſſere diviſa nel numeratore, e nel denominatore per $a$, per $a + b$, e per $aa + ab$; il maſſimo di queſti diviſori è $aa + ab$; adunque perchè ſia ridotta alla minima, biſognerà dividerla per $aa + ab$, e ſarà il quoziente $\frac{a - b}{c}$. Ma il più delle volte è aſſai difficile il riconoſcere ſe vi ſia, e quale ſia queſto comun diviſore, e però ſe ne darà la regola più abbaſſo al numero 36. per ora ommettendolo a fine di non confondere troppo la Gioventù non ancora avvezza, e paſſerò all'altre operazioni ſervendomi di frazioni ridotte all'eſpreſſione più ſemplice.

*Del Ridurre le Frazioni al comun Denominatore.*

31. Se le frazioni ſono due: Si moltiplichi il numeratore della prima nel denominatore della ſeconda, indi il numeratore della ſeconda nel denominatore della prima, e ciaſcun prodotto ſi divida per lo prodotto de' due denominatori; così $\frac{a}{b}+\frac{x}{y}$ ſarà $\frac{ay+xb}{by}$; $\frac{a^3}{yy}-\frac{2xx}{3b}$ ſarà $\frac{3a^3b-2xxyy}{3byy}$; $\frac{aa-xx}{m+n}-\frac{aa}{m}$ ſarà $\frac{aam-mxx-aam-aan}{mm+mn}$, cioè $\frac{-mxx-aan}{mm+mn}$. Ma deveſi avvertire, che alle volte i due denominatori delle frazioni poſſono avere un maſſimo comun diviſore, nel qual caſo è ſuperflua la moltiplicazione de' numeratori in eſſo maſſimo comun diviſore, e di eſſi comuni diviſori fra loro per formare un nuovo denominatore, perchè dovrebbeſi poi, ciò non oſtante, ridurre la frazione alla più ſemplice eſpreſſione; quindi debbonſi moltiplicare i ſuddetti numeratori non per i denominatori, ma per i quozienti, che riſultano dal dividere eſſi denominatori per lo comune loro diviſore; ed il denominatore ſarà il prodotto di eſſi quozienti, e del detto comun diviſore. Per eſempio ſia $\frac{a^3}{mn}+\frac{abb}{mx}$, riducendo al ſolito al comun denominatore, ſarebbe $\frac{a^3mx+abbmn}{mmnx}$, cioè $\frac{a^3x+abbn}{mnx}$; adunque era ſuperfluo moltiplicare i numera-

mera-

meratori per $m$ comun divisore de' denominatori, siccome era superfluo moltiplicare i denominatori fra loro, e bastava moltiplicare $a^3$ in $x$, ed $abb$ in $n$ per formare i numeratori, e moltiplicare $m$ in $n$ in $x$ per formare il comune denominatore. Così per ridurre al comune denominatore $\frac{a^3 - b^3}{\overline{a+b}^2} - \frac{aa}{a+b}$ basterà moltiplicare $-aa$ in $a+b$, e sarà $\frac{a^3 - b^3 - a^3 - aab}{\overline{a+b}^2}$, cioè $\frac{-b^3 - a^2b}{\overline{a+b}^2}$. Similmente per ridurre al comun denominatore $\frac{b^4}{aac - aad} + \frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$, poichè $c - d$ è comun divisore di ambi i denominatori, basterà moltiplicare $b^4$ per $d$, ed $a^3 + b^3$ per $aa$ rispetto a' numeratori, e moltiplicare $aa$ in $d$ in $c - d$ rispetto al denominatore, e però sarà $\frac{b^4d + a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Se le frazioni da ridursi al comun denominatore fossero tre: Si riducano le prime due, indi si riduca la risultante da queste colla terza; e così successivamente se fossero più. Per ridurre al comun denominatore $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}$, si riducano le prime due, e si avrà $\frac{ad + bc}{bd}$; e ridotta questa con la terza sarà $\frac{adn + bcn - bdm}{bdn}$. Che se inoltre vi fossero degli intieri; poichè qualunque intiero si può considerare, come una frazione, che abbia l'unità per denominatore, si procederà nello stesso mo-

do ; così $2aa + \frac{3x^4 - 2y^4}{3xx - 6ax}$, cioè $\frac{2aa}{1} + \frac{3x^4 - 2y^4}{3xx - 8ax}$ sarà $\frac{6aaxx - 16a^3x + 3x^4 - 2y^4}{3xx - 8ax}$.

*Della Somma, e Sottrazione delle Frazioni.*

32. Le frazioni si sommano con lo scriverle una presso dell'altra con que' segni, che ânno; ed all'opposto nella sottrazione si mutano i segni a quelle, che debbonsi sottrarre; e lo stesso facciasi se con le frazioni vi fossero degl'intieri. Per sommare $\frac{aa}{c}$ con $\frac{bb}{c}$, si scriva $\frac{aa + bb}{c}$; per sommare $\frac{aa}{c}$ con $\frac{xx - y}{m}$, si scriva $\frac{aa}{c} + \frac{xx - y}{m}$, che ridotta poi, se si vuole, al comun denominatore è $\frac{aam + cxx - cmy}{cm}$; per sommare $\frac{aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4}$ con $\frac{aabb}{aa - bb}$, si scriva $\frac{aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4} + \frac{aabb}{aa - bb}$, che se in oltre si voglia ridurre al comun denominatore, si osservi, che il denominatore della prima è il quadrato di $aa - bb$; adunque i denominatori ânno il massimo comun divisore $aa - bb$; e per esso divisi, i quozienti sono $aa - bb$ del primo, e l'unità del secondo, e però basterà moltiplicare il numeratore della seconda frazione per $aa - bb$, e dividere il tutto per $a^4 - 2aabb + b^4$, e sarà $\frac{aab^4 + a^4bb - aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4}$,

cioè

cioè $\frac{a^4bb}{a^4 - 2aabb + b^4}$. Per ſottrarre $\frac{bb}{c}$ da $\frac{aa}{c}$ ſi ſcriva $\frac{aa - bb}{c}$.
Per ſottrarre $a - \frac{xx}{m}$ da $\frac{yy}{m-n}$ ſi ſcriva $\frac{yy}{m-n} - a + \frac{xx}{m}$, e riducendo, ſe ſi vuole, al comun denominatore $\frac{myy - amm + amn + mxx - nxx}{mm - mn}$. Per ſottrarre $\frac{b^4}{4aac - 4aad}$ da $\frac{a^3 + b^3}{2cd - 2dd}$ ſi ſcriva $\frac{a^3 + b^3}{2cd - 2dd} \frac{- b^4}{4aac - 4aad}$, e volendo ridurre al comune denominatore ſi moltiplicherà $a^3 + b^3$ per $2aa$, e $-b^4$ per $d$, ed il tutto ſi dividerà per $4aacd - 4aadd$, e ſarà $\frac{2a^5 + 2aab^3 - b^4d}{4aacd - 4aadd}$.

*Della Moltiplicazione delle Frazioni.*

33. Si moltiplicano i numeratori fra loro, e lo ſteſſo ſi fa de' denominatori, e la nuova frazione è il prodotto delle frazioni moltiplicate. Così per moltiplicare $\frac{ac}{b}$ in $\frac{bc}{d}$ ſi ſcriva $\frac{abc^2}{bd}$, che ſi riduce ad $\frac{acc}{d}$; per moltiplicare $\frac{2ab}{b+c}$ in $\frac{3aa - bb}{5c}$ ſi ſcriva $\frac{6a^3b - 2ab^3}{5bc + 5cc}$. Lo ſteſſo ſi faccia ſe vi ſieno interi conſiderando l'intiero, come una frazione, il di cui denominatore ſia l'unità; così per moltiplicare $2a$ in $\frac{xx - 3yy}{3x}$ ſi faccia $\frac{2axx - 6ayy}{3x}$.

Debbasi moltiplicare $\frac{aa + bb}{a - b}$ in $a - b$. In questi, e simili casi, giacchè la quantità, che deve moltiplicare, è la stessa del denominatore della frazione, basterà cancellare il denominatore, ed il prodotto sarà $aa + bb$; debbasi moltiplicare $aa - bb$ in $\frac{aa - ab}{a + b}$: si osservi, che $aa - bb$ è $\overline{a + b} \times \overline{a - b}$, e però si verrebbe a moltiplicare $aa - ab$ in $a + b$ in $a - b$ per indi dividere per $a + b$; adunque giacchè $a + b$ sarebbe un comun divisore del numeratore, e denominatore, che risulterebbe, si potrà ommettere e la moltiplicazione, e la divisione per esso $a + b$, bastando che si moltiplichi il numeratore per $a - b$, ed il prodotto sarà $a^3 - 2aab + abb$. Così il prodotto di $\frac{a^3 - abb}{xx - yy}$ in $\frac{a^3}{aa - bb}$ sarà $\frac{a^4}{xx - yy}$.

*Della Divisione delle Frazioni.*

34. La divisione delle frazioni si farà moltiplicando in croce, cioè moltiplicando il numeratore del dividendo nel denominatore del divisore, e questo prodotto sarà il numeratore della frazione, che deve essere il quoziente; indi moltiplicando il denominatore del dividendo nel numeratore del divisore, ed il prodotto sarà il denominatore del quoziente. Questo quoziente poi, se sarà bisogno, si ridurrà all'espressione più semplice. Debbasi dividere $\frac{ab}{c}$

per

per $\frac{m}{n}$, farà il quoziente $\frac{abn}{cm}$; debbasi dividere $\frac{ab}{c}$ per $\frac{-m}{n}$, farà $\frac{abn}{-cm}$, o sia $-\frac{abn}{cm}$, che è lo stesso, numero 13.; debbasi dividere $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$, farà $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

E' chiaro il vedere, che se le due frazioni, cioè dividendo, e divisore, avessero il medesimo denominatore, sarebbe superflua la moltiplicazione in croce, come se si volesse dividere $\frac{aa}{m}$ per $\frac{c-d}{m}$, bastando in questo caso dividere $aa$ per $c-d$; poichè moltiplicando in croce sarebbe $\frac{aam}{cm-dm}$, ma riducendo alla minima espressione farà $\frac{aa}{c-d}$. Così dividendo $\frac{a^3-abb}{c-d}$ per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, farà $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$; ma riducendola, poichè il numeratore è $a\times\overline{a+b}\times\overline{a-b}$, ed il denominatore è $\overline{a+b}\times\overline{a+b}$, farà $\frac{aa-ab}{a+b}$. Istessamente si operi dividendo intiero per frazione, o frazione per intiero, considerando l'intiero come una frazione, il di cui denominatore sia l'unità; così dividendo per $\frac{2yy-3xy}{3a}$ la quantità $aa-xx$, farà $\frac{3a^3-3axx}{2yy-3xy}$.

*Dell'Estrazione delle Radici dalle Frazioni.*

35. Si estrae la radice dalle frazioni con lo estraere la radice dal numeratore, ed indi dal denominatore; e questa

questa nuova frazione sarà la radice della frazione proposta. La radice quadrata di $\frac{aabb}{cc}$ sarà adunque $\frac{ab}{c}$; la radice quadrata di $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$ sarà $\frac{aa - bb}{a + 2b}$; la radice quadrata di $\frac{4aa + 64xx - 160ax}{25}$, cioè di $\frac{100aa + 64xx - 160ax}{25}$ sarà $\frac{10a - 8x}{5}$. Lo stesso dicasi delle radici cube, quarte, quinte ec.

Ma se non si potrà estraere la radice dal numeratore, e denominatore, bensì da uno de' due; si estragga da quello, da cui si può, ed all' altro si ponga il segno radicale. Così la radice cuba di $\frac{a^6}{a^3 - x^3}$ sarà $\frac{aa}{\sqrt[3]{a^3 - x^3}}$, la radice cuba di $\frac{aax - x^3}{a^3 b^3}$ sarà $\frac{\sqrt[3]{aax - x^3}}{ab}$. E se nè dal numeratore, nè dal denominatore si potrà estrarre essa radice, si porrà tutta la frazione sotto al vincolo radicale; così la radice quadrata di $\frac{x^4 - a^4}{xx + bx}$ sarà $\sqrt{\frac{x^4 - a^4}{xx + bx}}$.

*Del massimo comun Divisore di due Quantità, o Formole.*

36. Per formola s'intende una qualunque espressione analitica incompleßa, o compleßa, le di cui lettere facendo figura d'indeterminate possono essere quelle, che più si vuole per modo, che tutto ciò, che di essa formola si dica, s'intenda

da detto di qualunque altra d'altre lettere compoſta, ma ad eſſa ſimile.

Per avere il maſſimo comun diviſore di due quantità, o formole: In primo luogo ſi oſſervi, ſe ciaſcun termine d'ambedue foſſe moltiplicato per una medeſima quantità, o numero; nel qual caſo per eſſo ſi faccia la diviſione, indi ſi ordini l'una, e l'altra formola ſecondo una qualunque lettera a piacere; cioè ſi ponga per primo termine quello, in cui eſſa lettera è alla maggiore dimenſione, ed indi gli altri per ordine. Sieno le due formole

$$18a^3bx - 8a^4b - 3abx^3 - 8a^2bxx + bx^4$$
$$6a^3b + bx^3 - abxx - 8aabx$$

le quali, poichè ſono diviſibili per la lettera $b$, diviſe ed ordinate, ſe così piace, per la lettera $x$ ſono $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$; $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$. Ciò fatto, la prima, cioè quella in cui la lettera $x$, che ordina i termini, è alla maggior dimenſione, ſi divida per la ſeconda dicendo $x^4$ diviſo per $x^3$ dà di quoziente $x$, ed il prodotto di queſto quoziente nel diviſore ſi ſottragga dal dividendo, e ſi avrà il primo reſto $-2ax^3 + 12a^3x - 8a^4$, che ſi riduca all'eſpreſſione più ſemplice (come ſempre deve farſi) dividendolo per $-2a$, e ſarà $x^3 - 6aax + 4a^3$. E perchè la dimenſione della $x$ in queſto reſiduo è la ſteſſa del diviſore, con lo ſteſſo diviſore ſi divida eſſo reſiduo, da cui iſteſſamente ſottraggaſi il prodotto del quoziente nel diviſore, e ſi avrà il ſecondo reſiduo $axx + 2aax - 2a^3$, cioè, dividendo per $a$, $xx + 2ax - 2aa$. Ora poichè in queſto reſiduo

duo la dimenſione della $x$ è minore che nel diviſore, s'inverta l'ordine, e ſi faccia ſervire queſto reſiduo di diviſore, ed il diviſore primo di dividendo, e fatta la diviſione, ſi ſottragga il prodotto del quoziente nel ſecondo diviſore dal ſecondo dividendo, cioè da $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$, e ſarà il reſiduo $- 3axx - 6aax + 6a^3$, cioè dividendo per $- 3a$, $xx + 2ax - 2aa$; e perchè queſt'ultimo reſiduo è lo ſteſſo del diviſore, ſarà eſſo il maſſimo comun diviſore delle due formole $x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4$; $x^3 - axx - 8aax + 6a^3$, e queſto moltiplicato in $b$, cioè $bxx + 2abx - 2aab$ ſarà il maſſimo comune diviſore delle due formole da prima propoſte $bx^4 - 3abx^3 - 8aabxx + 18a^3bx - 8a^4b$; $bx^3 - abxx - 8aabx + 6a^3b$, le quali furono diviſe per $b$.

Sieno le due formole $x^4 - 4ax^3 + 11aaxx - 20a^3x + 12a^4$; $x^4 - 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4$ ordinate per la lettera $x$, la quale eſſendo alla ſteſſa dimenſione nell'una, e nell'altra, è arbitrario di prendere quella, che ſi vuole, per diviſore. Si divida adunque la prima per la ſeconda, e ſottratto dal dividendo il prodotto del quoziente nel diviſore, ſarà il primo reſiduo $- ax^3 - aaxx - 4a^3x - 12a^4$, cioè dividendo per $- a$, $x^3 + axx + 4aax + 12a^3$. Quì invertendo l'ordine ſi prenda queſto reſiduo per diviſore, ed il primo diviſore per dividendo; fatta la diviſione, e ſottrazione del prodotto del quoziente in queſto ſecondo diviſore dal ſecondo dividendo, ſarà il ſecondo reſiduo $- 4ax^3 + 8aaxx - 28a^3x + 24a^4$; cioè divi-

dividendo per $-4a$, $x^3 - 2axx + 7aax - 6a^3$. Con lo ſteſſo ſecondo diviſore ſi continovi la diviſione di queſto ſecondo reſiduo, e fatta la ſottrazione al ſolito, ſi avrà il terzo reſiduo $-3axx + 3aax - 18a^3$, cioè dividendo per $-3a$, $xx - ax + 6aa$. Si inverta di nuovo l'ordine, e per queſto terzo reſiduo ſi divida il ſecondo diviſore $x^3 + axx + 4aax + 12a^3$, e fatta la ſottrazione al ſolito, ſi troverà il reſiduo $2axx - 2aax + 12a^3$, cioè dividendo per $2a$, $xx - ax + 6aa$, che è la ſteſſa quantità di quella, che â ſervito di diviſore; e però il maſſimo comune diviſore delle due propoſte formole.

Sieno le due formole $f^4 - aaff - bbff + aabb$; $f^3 - aff - 2abf + 2aab$ ordinate per la lettera $f$. Si divida la prima per la ſeconda, ed il prodotto del quoziente $f$ nel diviſore ſottratto dal dividendo darà il reſiduo primo $af^3 - aaff + 2abff - bbff - 2aabf + aabb$, che ſi proſeguiſca a dividere per lo ſteſſo diviſore, e ſottratto il prodotto del diviſore nel quoziente $a$ dal dividendo, ſi avrà il ſecondo reſiduo $2abff - bbff - 2a^3b + aabb$, cioè dividendo per $b$, $2aff - bff - 2a^3 + aab$; ſi inverta l'ordine, e per queſto ſecondo reſiduo ſi divida il primo diviſore $f^3 - aff - 2abf + 2aab$, e fatto il prodotto del quoziente $\frac{f}{2a - b}$ nel detto reſiduo, che â ſervito ora di diviſore, ed indi fatta la ſottrazione, ſi avrà il terzo reſiduo $-aff + aaf - 2abf + 2aab$, cioè dividendo per $-a$, $ff - af + 2bf - 2ab$. Con lo ſteſſo ordine ſi continovi la diviſione, e ſottratto il prodotto del

quoziente $\frac{1}{2a-b}$ nel divisore $2aff - bff + aab - 2a^3$, si â il quarto residuo $-af + 2bf - 2ab + aa$, per cui, invertendo pure l'ordine, si divida il terzo residuo, e sottratto il prodotto del quoziente $\frac{f}{2b-a}$ nel divisore, si avrà il quinto residuo $2bf - 2ab$, cioè dividendolo per $2b$, $f-a$; esso si divida per il quarto residuo $-af + 2bf - 2ab + aa$, e sottratto il prodotto del quoziente $\frac{1}{2b-a}$ nel divisore, rimane nulla; quindi se per lo denominatore dell'ultimo quoziente, essendo una frazione, si dividerà l'ultimo divisore $-af + 2bf - 2ab + aa$, sarà il quoziente $f-a$ il massimo divisore delle due formole proposte; ma perchè era arbitrario di eleggere per divisore quello, che si è eletto per dividendo, e vicendevolmente, cioè si poteva anche dividere $-af + 2bf - 2ab + aa$ per $f-a$, si faccia attualmente la divisione, ed il quoziente sarà $2b - a$ senza residuo, e però $f-a$ il massimo comune divisore, come si è già ritrovato per mezzo dell'altra divisione.

Possono però due formole avere un massimo comun divisore, quantunque essendo esse ordinate secondo una tal lettera, non possa in questo modo ritrovarsi, nel qual caso fa d'uopo ordinarle secondo altra lettera fino, che ci venga fatto di ritrovarlo; che se fatta la prova ordinandole secondo ciascuna lettera, non ci riesce l'intento, non averanno esse un massimo comune divisore; così non ritroverassi nelle due formole di quest'ultimo esempio ordinandole

nandole secondo la lettera $b$, che però si è ritrovato avendole ordinate secondo la lettera $f$.

Le tre frazioni adunque

$$\frac{x^4 - 3ax^3 - 8aaxx + 18a^3x - 8a^4}{x^3 - axx - 8aax + 6a^3}$$

$$\frac{x^4 - 4ax^3 + 11aaxx - 20a^3x + 12a^4}{x^4 - 3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4}$$

$$\frac{f^4 - aaff - bbff + aabb}{f^3 - aff - 2abf + 2aab}$$

dividendo il numeratore, e denominatore della prima per $xx + 2ax - 2aa$; della seconda per $xx - ax + 6aa$; e della terza per $f - a$, verranno ad essere

La Prima $\quad \frac{xx - 5ax + 4aa}{x - 3a}$

La Seconda $\quad \frac{xx - 3ax + 2aa}{xx - 2ax + 4aa}$

La Terza $\quad \frac{f^3 + aff - bbf - abb}{ff - 2ab}$

Ridotte così all'espressione più semplice, come dissi di sopra al numero 30.

*Della Riduzione delle Quantità irrazionali alla più semplice espressione.*

37. Si è veduto, come nascano le quantità irrazionali, che sorde ancora, o radicali si chiamano; cioè quando attualmente non si può estrarre la radice, che si cerca, e però si fa uso del vincolo radicale. Ma spesse volte accade, che la quantità sotto al vincolo sia il prodotto di due moltiplicatori, uno de' quali sia appunto una potestà dello stesso nome della radice, che si vuole; come sarebbe $\sqrt{aabc}$, o $\sqrt{aab - aax}$, la prima delle quali è la radice quadrata del prodotto di $aa$ in $bc$, la seconda del prodotto di $aa$ in $b - x$; così pure $\sqrt[3]{a^3x - a^3y}$, che è la radice cuba del prodotto di $a^3$ in $x - y$. In questi casi si cava la radice da quel moltiplicatore, da cui si può, e si scrive fuori del segno radicale lasciando l'altro sotto il segno, e ciò dicesi cavare la radice in parte, o sia ridurre la radicale alla più semplice espressione. Adunque $\sqrt{aabc}$ sarà lo stesso, che $a\sqrt{bc}$; $\sqrt{aab - aax}$ lo stesso, che $a\sqrt{b - x}$; $\sqrt[3]{a^3x - a^3y}$ lo stesso, che $a\sqrt[3]{x - y}$; e così dell'altre. Similmente poichè $\sqrt{48aabc}$ è la radice del prodotto di $16aa$ in $3bc$, ridotta sarà $4a\sqrt{3bc}$; così poichè $\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}}$ è la radice del prodotto di $aa -$

— 4ab

$-4ab+4bb$ in $ab$, e la radice di $aa-4ab+4bb$ è $a-2b$; ſarà la radice ridotta $\frac{a-2b}{c}\sqrt{ab}$. Così $\sqrt{\frac{aammxx+4aam^3p}{ppzz}}$ ridotta ſarà $\frac{am}{pz}\sqrt{xx+4mp}$. Così $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$ ridotta ſarà $2a\sqrt[3]{b+2a}$. Così $\sqrt{a^3-3aab+3abb-b^3}$, che è la radice del prodotto di $aa-2ab+bb$ in $a-b$, ridotta ſarà $\overline{a-b}\sqrt{a-b}$. Ma molte volte non ſi può colla ſola iſpezione riconoſcere, quali ſieno que' moltiplicatori, dai quali è nata la propoſta radicale; in queſti caſi biſogna ſervirſi del metodo di ritrovare tutti i diviſori, che darò a ſuo luogo, e ſe fra queſti ve ne ſarà uno, che ſia appunto una poteſtà di tale eſponente, quale è l'indice del radicale, ſi potrà ridurre nel modo, che è ſtato detto, la quantità propoſta.

*Del Ridurre i Radicali alla ſteſſa Denominazione.*

38. Si chiamano radicali di diverſa denominazione quelli, che ânno l'indice diverſo. Per ridurgli adunque a' radicali dello ſteſſo indice ſi farà così: Se l'indice d'un radicale è parte aliquota dell'indice dell'altro, ſi divida l'indice maggiore per il minore, ed il quoziente è quella poteſtà, a cui ſi debbono elevare le quantità, che ſono ſotto il radicale d'indice minore, ed a queſte prefiggere il radicale dell'indice maggiore. Sieno da ridurſi allo ſteſſo radicale le due quantità $\sqrt{\sqrt{ax}}$, o ſia (che è lo ſteſ-

ſo)

ſo) $\sqrt[4]{ax}$, e $\sqrt{a}$; poichè il quattro diviſo per due dà di quoziente due, elevata la quantità $a$ del ſecondo radicale al quadrato, ſarà $\sqrt[4]{aa}$, e però ridotta alla ſteſſa denominazione di $\sqrt[4]{ax}$. Così $\sqrt[6]{a^3b^3+ab^5}$, e $\sqrt{ab}$ ſaranno $\sqrt[6]{a^3b^3+ab^5}$, e $\sqrt[6]{a^3b^3}$. Ma ſe un indice non è parte aliquota dell' altro; ſi trovi il minimo numero, che ſia diviſibile ſenza frazione da ciaſcun indice de' radicali dati, e queſto ſarà l'indice del radicale comune; indi ſi elevino le quantità al grado proſſimamente inferiore del numero, per cui ſono creſciuti gl'indici dei loro reſpettivi radicali, e ad eſſe così elevate ſi prefigga il radicale comune ritrovato. Siano da ridurſi allo ſteſſo comune radicale le due quantità $\sqrt{aq}$, e $\sqrt[3]{aaq}$; il minimo numero diviſibile per 2, e per 3 ſarà 6, adunque $\sqrt[6]{\ }$ ſarà il comune radicale, e perchè l'indice della radice quadrata è creſciuto in queſto caſo di quattro, e quello della cubica di tre; adunque ſi farà riſpetto alla prima $\sqrt[6]{a^3q^3}$, e per la ſeconda $\sqrt[6]{a^4qq}$. Se i radicali da ridurſi foſſero più di due; ſe ne riducano prima due, e poi il terzo, e così ſucceſſivamente.

E' chiaro il modo di ridurre ſenza ajuto di regola i razionali a qualunque radicale elevando il razionale alla poteſtà dello ſteſſo nome, o indice del radicale, e prefiggendogli lo ſteſſo radicale.

Della

*Della Somma, e Sottrazione delle Quantità radicali.*

39. Per fommarle fi fcrivano le quantità radicali una dopo l'altra co' loro fegni, e per fottrarle fi mutino i fegni a quelle, che fi vogliono fottrarre, come fi è fatto nell'altre quantità. Così per fommare $5a\sqrt{bc}$ con $2b\sqrt{bx}$ con $-c\sqrt{zy}$, fi fcriva $2b\sqrt{bx}+5a\sqrt{bc}-c\sqrt{zy}$. Per fommare $5x\sqrt{ab}$ con $3x\sqrt{ab}$ con $y\sqrt{bx}$, fi fcriva $5x\sqrt{ab}+3x\sqrt{ab}+y\sqrt{bx}$, e riducendo i termini fimili, il che fempre fi deve fare, farà $8x\sqrt{ab}+y\sqrt{bx}$. Per fommare $a-b$ con $\sqrt{aa-xx}$, fi fcriva $a-b+\sqrt{aa-xx}$. Lo fteffo, avuto riguardo ai fegni, fi faccia nelle fottrazioni.

*Della Moltiplicazione delle Quantità radicali.*

40. Per moltiplicare quantità razionale con forda o radicale fi fcrive la razionale unitamente alla radicale, fenza alcun fegno frappofto, prefiggendo a quefto prodotto quel fegno pofitivo, o negativo, che porta la regola ordinaria della moltiplicazione, la qual cofa intendafi fempre doverfi fare. Il prodotto adunque di $a$ in $\sqrt{aa-xx}$ farà $a\sqrt{aa-xx}$, ed il prodotto di $ab$ in $-\sqrt{ab}$ farà $-ab\sqrt{ab}$. E fe le quantità razionali, e radicali foffero di più termini, cioè compleffe, fi moltiplichi ciafcun termine dell'una in ciafcun termine dell'altra, e però il pro-

prodotto di $aa - xx$ in $\sqrt{xx - yy}$ sarà $aa\sqrt{xx - yy} -$ $- xx\sqrt{xx - yy}$, che si scrive anche così $\overline{aa - xx}\sqrt{xx - yy}$ intendendo, che sieno moltiplicati nel radicale que' termini, che sono coperti al di sopra dalla retta linea.

41. Per moltiplicare i radicali fra loro ( supposto, che sieno della medesima denominazione, e non lo essendo tali si riducano ) si moltiplicano fra loro le quantità, che sono sotto i segni radicali, ed al prodotto si pone lo stesso vincolo radicale con quel segno positivo, o negativo, che esigge la solita regola. Quindi moltiplicando $\sqrt{bc}$ in $\sqrt{xy}$, il prodotto sarà $\sqrt{bcxy}$; moltiplicando $\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ in $-\sqrt{aa + xx}$, il prodotto sarà $-\sqrt{\frac{a^4 - x^4}{x}}$.

42. Che se in oltre i radicali averanno coefficienti razionali numerici, o letterali, si moltiplichino i coefficienti fra loro, ed i radicali fra loro, ed il prodotto de' coefficienti si ponga senza segno frapposto avanti al radicale. Così $a\sqrt[3]{bbc}$ in $a\sqrt[3]{bxx}$ sarà $aa\sqrt[3]{b^3cxx}$, cioè ridotta, $aab\sqrt[3]{cxx}$; così $2a - \sqrt{aa - xx}$ in $\frac{b}{a}\sqrt{aa + xx}$ sarà $2b\sqrt{aa + xx} - \frac{b}{a}\sqrt{a^4 - x^4}$.

43. Con questa regola per moltiplicare $m\sqrt{ab}$ in $n\sqrt{ab}$ si dovrebbe fare $mn\sqrt{aabb}$; ma $aabb$ è un quadrato, e la radice è appunto $ab$, adunque per moltiplicare tra loro due radicali quadratici simili, basterà levare

vare il vincolo radicale, e la quantità, che era ſotto, moltiplicata nel prodotto de' coefficienti ſarà il prodotto totale, e però $\frac{2b}{a}\sqrt{ax - xx}$ in $-\frac{c}{3}\sqrt{ax - xx}$ ſarà $-\frac{2bc}{3a} \times \overline{ax - xx}$, cioè $\frac{-2abcx + 2bcxx}{3a}$. Ma deveſi avere queſta avvertenza, che ſe le radici, non avendo coefficienti, ſono affette dallo ſteſſo ſegno poſitivo, o negativo, levato il vincolo, ſi laſciano le quantità con que' ſegni, che ânno; e ſe le radici ânno ſegni contrarj, ſi mutano tutti i ſegni alla quantità; e però $\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ in $\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$, o pure $-\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ in $-\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ ſarà $\frac{aa - xx}{x}$; e $\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ in $-\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ ſarà $\frac{-aa + xx}{x}$, o $\frac{aa - xx}{-x}$. La ragione ſi è, perchè $\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ (e così di qualunque altra) s'intende avere ſempre per coefficiente l'unità poſitiva, e $-\sqrt{\frac{aa - xx}{x}}$ l'unità negativa, adunque il prodotto dovrà eſſere $1 \times \frac{aa - xx}{x}$ nel primo caſo, e $-1 \times \frac{aa - xx}{x}$ nel ſecondo.

Ecco però alcuni eſempj di queſte moltiplicazioni

Moltiplicare $\sqrt{ab} + \sqrt{aa - xx}$

in $\sqrt{ab} + \sqrt{aa - xx}$

 Pro-

Prodotto $ab + \sqrt{a^3b - abxx} + aa - xx$

$+ \sqrt{a^3b - abxx}$

cioè $ab + 2\sqrt{a^3b - abxx} + aa - xx$

Moltiplicare $x - \sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}}$

in $x + \sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}}$

Prodotto $xx - x\sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}} \frac{- \sqrt{4a^4 + y^4} + yy}{2}$

$+ x\sqrt{\frac{\sqrt{4a^4 + y^4} - yy}{2}}$

cioè $xx - \frac{\sqrt{4a^4 + y^4}}{2} + \frac{yy}{2}$

Moltiplicare $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}}$

in $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}}$

Prodotto $\sqrt[3]{\frac{1}{4}qq + q\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}} + \frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}}$

cioè $\sqrt[3]{\frac{qq}{2} + q\sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{pp}{27}} - \frac{pp}{27}}$

44.

44. Poichè $a\sqrt{ax}$, $\overline{a-b}\sqrt{ax-xx}$ ec. è il prodotto della quantità razionale nella radicale, e già si sa ridurre qualunque razionale a quel radicale, che più piace, ne viene che si potrà sempre, volendolo, far passare sotto la radice quel razionale, che la moltiplica, senza alterare la quantità, e però sarà $a\sqrt{a-x}$ lo stesso, che $\sqrt{a^3-aax}$; $\overline{a-b}\sqrt{xy}$ sarà lo stesso, che $\sqrt{aaxy-2abxy+bbxy}$; $ax\sqrt[3]{m-n}$ sarà lo stesso, che $\sqrt[3]{a^3x^3m-a^3x^3n}$, e così di qualunque altra.

45. Se i radicali da moltiplicarsi non fossero dello stesso nome, tali si riducano, e poi si faccia la moltiplicazione, come si è detto; ma molte volte torna comodo l'indicarla solamente senza attualmente farla, e ciò con lo scrivere un radicale presso l'altro senza alcun segno frapposto; quindi $\sqrt{aa-xx}\,\sqrt[3]{xxy}$ vorrà dire il prodotto di una nell'altra radice.

*Della Divisione delle Quantità radicali.*

46. Se in ciascun termine del dividendo, e del divisore vi fosse la stessa radicale, ommessa questa, si dividano colla solita regola le quantità razionali, e ciò che risulta sarà il quoziente. Così a dividere $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, il quoziente sarà $\frac{5}{3}$; a dividere $6\sqrt{a^4+aabb}$

 per

per $2\sqrt{aabb + b^4}$, cioè $6a\sqrt{aa + bb}$ per $2b\sqrt{aa + bb}$, il quoziente sarà $\frac{3a}{b}$; a dividere $aa\sqrt[4]{aa + xx} - 2ax\sqrt[4]{aa + xx} + xx\sqrt[4]{aa + xx}$ per $a\sqrt[4]{aa + xx} - x\sqrt[4]{aa + xx}$, ommesso il radicale, e diviso $aa - 2ax + xx$ per $a - x$, sarà il quoziente $a - x$; a dividere $aa + bb$ per $\sqrt{aa + bb}$, poichè il dividendo è $\sqrt{aa + bb}\sqrt{aa + bb}$, sarà il quoziente $\sqrt{aa + bb}$.

47. Ma quando le radicali non sono le stesse, essendo per altro lo stesso l'indice della radice, si dividono al solito delle quantità razionali le quantità sotto il vincolo, ed al quoziente si prefigge il comune vincolo radicale; così a dividere $\sqrt[3]{a^3b - ab^3}$ per $\sqrt[3]{aa - bb}$, diviso $a^3b - ab^3$ per $aa - bb$, ne viene $ab$; e però il quoziente sarà $\sqrt[3]{ab}$.

48. E se gl'indici delle radici saranno diversi, si riducano allo stesso, e si operi poi come ho detto, onde a dividere $\sqrt{a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$ per $a + b$ si faccia il quadrato di $a + b$, e si ponga sotto al vincolo, sarà $\sqrt{aa + 2ab + bb}$; indi per la quantità di questa radice si divida la prima, e risulta $aa - bb$; adunque il quoziente sarà $\sqrt{aa - bb}$.

Con la combinazione di queste regole, e di quelle dell'ordinaria divisione si possono dividere le quantità più

più compleſſe. Sia da dividerſi $a^3b - abbc - aab\sqrt{bc} + bbc\sqrt{bc}$ per $a - \sqrt{bc}$, ſi faccia al ſolito delle diviſioni

Dividendo $a^3b - abbc - aab\sqrt{bc} + bbc\sqrt{bc}$ Diviſore $a - \sqrt{bc}$
Primo reſto $-abbc + bbc\sqrt{bc}$ Quoziente $aab - bbc$

Così pure dividendo $a^2 - abc + aa\sqrt{bc} - bc\sqrt{bc}$ per $a - \sqrt{bc}$ averaſſi per quoziente $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$. E ſe la diviſione non potrà ſuccedere, ſi ſcriverà in forma di frazione.

### *Dell' Eſtrazione della Radice quadrata dalle Quantità radicali.*

49. Purchè la quantità in qualunque modo compoſta di razionali con radicali ſia di radicali quadratici, la regola di eſtrarne la radice quadrata ſarà queſta: Preſa della quantità propoſta una qualunque parte, che ſia maggiore della rimanente, dal quadrato della parte maggiore ſi ſottragga il quadrato della parte minore, e la radice quadrata di ciò, che reſta, ſi aggiunga alla parte maggiore, indi da eſſa ſi ſottragga; le radici quadrate della metà di queſta ſomma, e della metà di queſta differenza preſe aſſieme, poſto quel ſegno alla ſeconda che â la parte minore, ſaranno la radice quadrata della propoſta quantità. Debbaſi cavare la radice quadrata dalla quantità $3 + \sqrt{8}$, ſottratto il

qua-

quadrato di $\sqrt{8}$ dal quadrato di 3, rimane 1, la di cui radice è pure 1; aggiungendola adunque alla parte maggiore, cioè a 3, ſarà 4, e dalla ſteſſa ſottraendola ſarà 2, adunque la radice quadrata della metà del 4 con la radice quadrata della metà del 2 ſaranno la radice cercata, cioè $\sqrt{2}+1$.

Vogliaſi la radice quadrata di $6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$. Dal quadrato di $6+\sqrt{8}$ ſottratto il quadrato di $-\sqrt{12}-\sqrt{24}$, rimane 8, la di cui radice $\sqrt{8}$ aggiunta a $6+\sqrt{8}$, parte maggiore, fa $6+2\sqrt{8}$, e da eſſa parte maggiore ſottratta fa 6; e però la prima parte della radice cercata ſarà $\sqrt{\frac{6+2\sqrt{8}}{2}}$, cioè $\sqrt{3+\sqrt{8}}$, e la ſeconda $-\sqrt{\frac{6}{2}}$, cioè $-\sqrt{3}$ (perchè la minor parte della quantità propoſta era affetta dal ſegno negativo) onde $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3}$ ſarà la radice. Ma nell' antecedente eſempio ſi è veduto eſſere $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ lo ſteſſo, che $1+\sqrt{2}$; adunque la radice della propoſta quantità ſarà finalmente $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Debbaſi eſtrarre la radice quadrata da $aa+2x\sqrt{aa-xx}$. Sottratto dal quadrato di $aa$ il quadrato di $2x\sqrt{aa-xx}$, ſarà $a^4-4aaxx+4x^4$, la di cui radice è $aa-2xx$, la quale aggiunta alla parte maggiore $aa$, e preſane la metà, ſarà $aa-xx$, e da eſſa ſottratta, e preſa la metà della differenza, ſarà $xx$; adunque la ricercata radice ſarà $\sqrt{aa-xx}+x$. Deb-

Debbasi estrarre la radice quadrata dalla quantità $aa + 5ax - 2a\sqrt{ax + 4xx}$. Dal quadrato di $aa + 5ax$, parte maggiore, sottratto il quadrato di $-2a\sqrt{ax + 4xx}$, rimane $a^4 + 6a^3x + 9aaxx$, la di cui radice è $aa + 3ax$, la quale aggiunta alla parte maggiore, e presane la metà, fa $aa + 4ax$, e sottratta e presane la metà, fa $ax$; e però la radice cercata sarà $\sqrt{aa + 3ax} - \sqrt{ax}$.

Debbasi estrarre la radice quadrata dalla quantità $a\sqrt{bc} + d\sqrt{bc} + 2\sqrt{abcd}$. Dal quadrato di $a\sqrt{bc} + d\sqrt{bc}$ sottratto il quadrato di $2\sqrt{abcd}$, rimane $aabc - 2abcd + bcdd$, la di cui radice è $a\sqrt{bc} - d\sqrt{bc}$, la quale aggiunta alla parte maggiore, ed indi sottratta, e presa la metà della somma e della differenza, sarà la metà di detta somma $a\sqrt{bc}$, e la metà di detta differenza $d\sqrt{bc}$; adunque la radice cercata sarà $\sqrt{a\sqrt{bc}} + \sqrt{d\sqrt{bc}}$, cioè $\sqrt{\sqrt{aabc}} + \sqrt{\sqrt{bcdd}}$, o sia $\sqrt[4]{aabc} + \sqrt[4]{bcdd}$. Che se non succederà di poter estrarre la radice, si porrà al solito il vincolo radicale.

*Del Calcolo delle Potestà.*

50. Nulla occorre notare intorno alla somma, e sottrazione delle Potestà, scrivendosi esse pure una dopo l'altra con que' segni che ânno, nel primo caso, e mutandosi i segni nel secondo. Ma rispetto all'altre ope-

operazioni, che riguardano gli esponenti: Si osservi primieramente, che presa l'unità per primo termine, ed una qualunque quantità, per esempio $a$, per secondo, indi successivamente le altre potestà per ordine della stessa quantità $a$, è chiaro che formerassi una progressione geometrica crescente $1, a, aa, a^3, a^4, a^5, a^6$ ec., e che gli esponenti di essa progressione formeranno una progressione aritmetica crescente, che sarà $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ec., il di cui primo termine è il zero, perchè essendo l'unità il primo termine della geometrica, in esso la quantità $a$ è elevata a potestà zero, cioè a nessuna potestà di modo, che $1 = \frac{a}{a} = a^0$. In fatti moltiplicando tanto $\frac{a}{a}$, quanto $a^0$ per $a$, onde non si turbi l'eguaglianza, sarà $a = a^{0+1}$, grandezze patentemente identiche. E se in oltre si continuerà la stessa progressione geometrica al di sotto dell'unità, sarà essa $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^5}$ ec.; e continuando parimenti la progressione aritmetica degli esponenti, essi doveranno essere $0, -1, -2, -3, -4$ ec.; e però negativi gli esponenti di tali potestà, adunque $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$ ec. sarà lo stesso, che $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}$ ec., e generalmente $\frac{1}{a^n}$ sarà lo stesso, che $a^{-n}$; vale a dire, che si potrà sempre far passare nel numeratore di una frazione la potestà, che

è

è nel denominatore, mutando il ſegno all'eſponente, e vicendevolmente.

51. Se di più ſi voleſſero introdurre nella progreſſione geometrica de' nuovi termini intermedj, gli eſponenti di queſti ſaranno nuovi termini intermedj ſimili nella progreſſione aritmetica; quindi poichè $\sqrt{a}$ è media geometrica fra l'unità ed $a$, l'eſponente di eſſa dovrà eſſere medio aritmetico fra il zero e l'unità; e però ſarà $\frac{1}{2}$, adunque ſarà lo ſteſſo $\sqrt{a}$ ed $a^{\frac{1}{2}}$. Se intendanſi due medie proporzionali geometriche, che ſono $\sqrt[3]{a}$ la prima, e $\sqrt[3]{aa}$ la ſeconda, dovranno eſſere medj aritmetici i loro eſponenti fra il zero e l'unità, e però ſaranno $\frac{1}{3}$, e $\frac{2}{3}$; adunque ſarà lo ſteſſo $\sqrt[3]{a}$ ed $a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{aa}$ ed $a^{\frac{2}{3}}$. Se introdurranſi tre medie proporzionali geometriche, che ſono $\sqrt[4]{a}$ la prima, $\sqrt[4]{aa}$ la ſeconda, $\sqrt[4]{a^3}$ la terza, dovranno eſſere i loro eſponenti $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$. Adunque ſarà lo ſteſſo $\sqrt[4]{a}$ ed $a^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[4]{aa}$ ed $a^{\frac{2}{4}}$, $\sqrt[4]{a^3}$ ed $a^{\frac{3}{4}}$; e così diſcorrendo di quante altre medie ſi vogliano introdurre, onde ſarà lo ſteſſo generalmente $\sqrt[m]{a^n}$ ed $a^{\frac{n}{m}}$.

Lo ſteſſo diſcorſo facendo riſpetto alla progreſſione prodotta al di ſotto dell'unità; ſiccome $\sqrt{\frac{1}{a}}$ è media tra l'unità ed $\frac{1}{a}$, o ſia tra l'unità ed $a^{-1}$, così l'eſponente

di essa dovrà essere medio tra il zero e l'unità negativa, sarà egli adunque $-\frac{1}{2}$, e però sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt{a}}$, ed $a^{-\frac{1}{2}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; così pure sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ ed $a^{-\frac{1}{3}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$; sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt[3]{aa}}$ ed $a^{-\frac{2}{3}}$, ovvero $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$ ec., e generalmente sarà lo stesso $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ ed $a^{-\frac{n}{m}}$, o sia $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}$.

Ciò, che ho detto delle potestà intiere, o rotte di quantità incomplesse, s'intenda egualmente di quantità complesse, di modo che, per esempio $\frac{1}{\overline{aa+bb}^{n}}$ sarà lo stesso, che $\overline{aa+bb}^{-n}$; e così $\sqrt[m]{\overline{aa+bb}^{n}}$ sarà lo stesso, che $\overline{aa+bb}^{\frac{n}{m}}$; e $\sqrt[m]{\frac{1}{\overline{aa+bb}^{n}}}$ sarà lo stesso, che $\frac{1}{\overline{aa+bb}^{\frac{n}{m}}}$, o pure $\overline{aa+bb}^{-\frac{n}{m}}$.

52. Dalla natura delle due soprapposte progressioni, geometrica, ed aritmetica, si ricava la maniera di moltiplicare tra loro, e dividere due potestà, quali si sieno, della medesima quantità, cioè sommando gli esponenti loro quando vogliono moltiplicarsi le potestà, e sottraendo l'esponente del divisore dall'esponente del dividendo quando vogliono dividersi. Imperciocchè per ciò, che spetta alla moltiplicazione; comecchè il prodotto

dotto è il quarto proporzionale dell'unità, e de' due moltiplicatori, ſaranno queſti quattro termini in una progreſſione geometrica, e gli eſponenti loro in una progreſſione aritmetica; adunque l'eſponente del quarto, cioè del prodotto, deve eſſere maggiore dell'eſponente del terzo di quanto l'eſponente del ſecondo è maggiore dell'eſponente del primo; ma l'eſponente del ſecondo è maggiore dell'eſponente del primo, che è il zero, di tutto ſe ſteſſo; adunque l'eſponente del quarto dovrà eſſere maggiore dell'eſponente del terzo, quanto è l'eſponente del ſecondo, cioè dovrà eſſere la ſomma dell'eſponente del ſecondo, e del terzo. Per ciò, che riguarda la diviſione; ella è la ſteſſa proporzione della moltiplicazione, ma inverſa, il di cui primo termine è il dividendo; il ſecondo il diviſore; il terzo il quoziente; ed il quarto l'unità, onde quanto l'eſponente del dividendo è maggiore dell'eſponente del diviſore, tanto dovrà eſſere maggiore del zero l'eſponente del quoziente, e però dovrà eſſere appunto la differenza degl'eſponenti del dividendo, e diviſore. Adunque per moltiplicare $aa$ con $a$ ſi farà $a^{2+1}$, cioè $a^3$; per moltiplicare $a^5$ con $aa$ ſi farà $a^{5+2}$, cioè $a^7$; per moltiplicare $a^6$ con $a^{-3}$ ſi farà $a^{6-3}$, cioè $a^3$; per moltiplicare $a^{\frac{1}{2}}$ con $a^{\frac{1}{3}}$ ſi farà $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, cioè $a^{\frac{5}{6}}$; per moltiplicare $a^{-\frac{2}{3}}$ con $a^{\frac{1}{5}}$ ſi farà $a^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$, cioè $a^{-\frac{7}{15}}$; per moltiplicare $a^{\pm\frac{n}{m}}$ con $a^{\pm\frac{r}{t}}$ ſi farà $a^{\pm\frac{n}{m}\pm\frac{r}{t}}$, cioè $a^{\frac{\pm nt \pm mr}{mt}}$,

E così per dividere $a^3$ per $a$ si farà $a^{3-1}$, cioè $a^2$; per dividere $a^5$ per $a^{-2}$ si farà $a^{5+2}$, cioè $a^7$; per dividere $a^2$ per $a^{\frac{1}{2}}$ si farà $a^{2-\frac{1}{2}}$, cioè $a^{\frac{3}{2}}$; per dividere $a^{\frac{2}{3}}$ per $a^{-\frac{1}{2}}$ si farà $a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$, cioè $a^{\frac{7}{6}}$; per dividere $a^{\pm\frac{n}{m}}$ per $a^{\pm\frac{r}{t}}$ si farà $a^{\pm\frac{n}{m}\mp\frac{r}{t}}$, cioè $a^{\frac{\pm nt \mp mr}{mt}}$.

53. E poichè nella progressione di sopra considerata, preso un qualunque termine, il termine dell' esponente doppio è il quadrato del termine preso; il termine dell'esponente triplo è il cubo; dell'esponente quadruplo la quarta potestà ec.; ed il termine dell' esponente, che sia la metà, è la radice quadrata del termine preso, il termine dell'esponente, che sia la terza parte, la quarta ec., è la radice cuba, quarta ec. del termine preso; ne viene per conseguenza, che per ridurre una potestà ad un'altra, basterà moltiplicare l'esponente della potestà data per l' esponente di quella potestà, a cui si vuole elevare; e per cavarne una qualunque radice, basterà dividere l'esponente della potestà per l'indice della radice.

Così per elevare $aa$ al cubo si farà $a^{2\times 3}$, cioè $a^6$; per elevare $a^{\frac{2}{3}}$ al cubo si farà $a^{\frac{2}{3}\times 3}$, cioè $aa$; per elevare $a^{-\frac{1}{4}}$ alla quinta potestà si farà $a^{-\frac{5}{4}}$; per elevare $a^{\pm\frac{n}{m}}$ alla potestà $\pm\frac{r}{t}$ si farà $a^{\pm\frac{nr}{mt}}$. Così per cava-

re

re la radice quadrata da $a^5$ ſi farà $a^{\frac{5}{2}}$ ; per cavare la radice cuba di $a^{\frac{1}{2}}$ ſi farà $a^{\overline{2\times 3}}$, cioè $a^{\frac{1}{6}}$ ; per cavare la radice $r$ da $a^{\frac{\pm m}{n}}$ ſi farà $a^{\frac{\pm m}{nr}}$ ec.

54. Ciò, che ho detto delle poteſtà di una medeſima quantità incompleſſa, s'intenda egualmente detto delle poteſtà di una medeſima quantità compleſſa, come da ſe è chiaro; e con queſto metodo ſi viene a facilitare molto il calcolo delle frazioni; e de' radicali.

*De' Diviſori lineari d'una qualunque Formola.*

55. Una qualunque quantità o formola incompleſſa, o compleſſa ſi dice prima e ſemplice quando ella non è diviſibile eſattamente da quantità alcuna, fuorchè da ſe ſteſſa, e dall'unità; e chiamaſi compoſta quando è diviſibile eſattamente per alcun'altra quantità. Prime o ſemplici ſarebbero, per eſempio, $a+b$, $aa+xx$, $x^3-aax+aab$ ec.; compoſte $ab$, che è diviſibile per $a$, e per $b$; $aa-xx$, che è diviſibile per $a+x$, e per $a-x$ ec.

Due, o più formole ſono prime riſpettivamente tra loro quando non ânno alcuno comune diviſore, e che la minore non è un diviſore della maggiore; tali ſarebbero tra loro $bb$ ed $aa$; $aa+2ab+bb$ ed $aa+bb$ ec.; ed all'oppoſto ſono aſſolutamente, e relativamente tra loro compoſte quando ânno qualche comun diviſore,

visore, o che una divide l'altra, come a dire $aa$, ed $ab$, che sono ambe divisibili per $a$; $aa - xx$, ed $a + x$, che sono divisibili per $a + x$ ec.

Per avere tutti i divisori incomplessi di una quantità numerica, o letterale, o mista; si divida essa per lo minimo di lei divisore, ed il quoziente di nuovo per lo minimo di lui divisore, e così successivamente fino a tanto, che si trovi un quoziente, che più non possa dividersi, che per se stesso; queste quantità, per le quali è stata divisa la proposta formola, compresa l'unità, saranno tutti i divisori semplici; e presi a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec., cioè secondo tutte le combinazioni, daranno tutti i divisori composti.

Si vogliano i divisori del numero 300

Si scriva il numero dato 300 in ($A$), ed accanto in ($B$) il minimo divisore, che è il 2; fatta la divisione per 2, si scriva in ($A$) il quoziente 150 sotto il 300, e questo 150 di nuovo si divida per 2, e gli si scriva di contro in ($B$) il divisore 2, ed il quoziente 75 si scriva in ($A$) sotto al primo quoziente 150. Poiche il 75 non è divisibile per 2, si divida per 3, e di contro gli si scriva in ($B$) il divisore 3, e sotto in ($A$) il quoziente 25; il minimo divisore del 25 è il 5, che gli si scriva dirimpetto in ($B$), e sotto in ($A$) il quoziente 5; il quoziente ultimo 5 non è divisibile, che per se stesso, adunque si scriva pure accanto in

($B$)

($B$) esso divisore 5, e si avranno tutti i divisori primi, ai quali si aggiunga l'unità, perchè essa è sempre un divisore di qualunque quantità. Per avere tutti i divisori composti secondo tutte le combinazioni, per il secondo divisore si moltiplichi il primo, ed il prodotto 4 si scriva in ($B$) accanto al secondo divisore; per il terzo divisore si moltiplichino tutti i superiori, e gli si scrivano a canto i prodotti 6, 12 (ponendo una sol volta quelli, che potessero essere replicati), per il quarto si moltiplichino parimenti tutti i superiori, e gli si scrivano accanto i prodotti, e così successivamente fino all'ultimo. I numeri scritti in ($B$) saranno tutti i divisori del proposto numero 300.

| ($A$) | ($B$) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | | | |
| 300 | 2 | | | | | | |
| 150 | 2 | 4 | | | | | |
| 75 | 3 | 6 | 12 | | | | |
| 25 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 60 | |
| 5 | 5 | 25 | 50 | 75 | 100 | 150 | 300 |
| 1 | | | | | | | |

Sia la formola $21abb$, di cui debbansi ritrovare tutti i divisori. Poichè non è divisibile per 2; si divida per 3, che gli si scriva di contro in ($B$), ed il quoziente $7abb$ di sotto in ($A$), si divida $7abb$ per 7, che gli si scriva di contro, ed il quoziente $abb$ di sotto; dividasi $abb$ per $a$, che gli si scriva di contro, ed il quoziente $bb$ di sotto; indi si divida $bb$ per $b$, che si scriva di

contro,

contro, e di sotto il quoziente $b$, che si divida per $b$; e gli si scriva di contro, e si avranno tutti i divisori primi 1, 3, 7, $a$, $b$, $b$ della proposta quantità. Per avere i composti: si moltiplichi il 3 in 7, e nasce 21; si moltiplichino il 3, il 7, ed il 21 in $a$, e nascono $3a$, $7a$, $21a$; si moltiplichino in $b$ i divisori 3, 7, 21, $a$, $3a$, $7a$, $21a$, e nascono $3b$, $7b$, $21b$, $ab$, $3ab$, $7ab$, $21ab$; si moltiplichino finalmente 3, 7 ec.; cioè tutti i superiori in $b$, e nascono (ommessi i superflui, che nascono replicati) $bb$, $3bb$, $7bb$, $21bb$, $abb$, $3abb$, $7abb$, $21abb$, e la colonna $(B)$ contiene tutti i divisori della quantità proposta.

| $(A)$ | $(B)$ |
|---|---|
| | 1 |
| $21abb$ | 3 |
| $7abb$ | 7, 21 |
| $abb$ | $a$, $3a$, $7a$, $21a$ |
| $bb$ | $b$, $3b$, $7b$, $21b$, $ab$, $3ab$, $7ab$, $21ab$ |
| $b$ | $b$, $bb$, $3bb$, $7bb$, $21bb$, $abb$, $3abb$, $7abb$, $21abb$ |
| 1 | |

Similmente sia $2abb - 6aac$. Si divida prima per 2, ed il quoziente $abb - 3aac$ per $a$, ed il nuovo quoziente $bb - 3ac$ per se medesimo, giacchè per nessuna quantità è divisibile, e però tutti i divisori sono, come nella colonna $(B)$

| $(A)$ | $(B)$ |
|---|---|
| | 1 |
| $2abb - 6aac$ | 2 |
| $abb - 3aac$ | $a$, $2a$ |
| $bb - 3ac$ | $bb - 3ac$, $2bb - 6ac$, $abb - 3aac$, $2abb - 6aac$ |
| 1 | |

56.

56. Ma se l'ultimo quoziente, o pure la formola stessa da prima proposta, fosse bensì composta, non però divisibile nel modo suddetto per alcuna quantità incomplessa, di modo che fossero complessi tutti i suoi divisori, la maniera per averli è diversa, ed è questa. Si ordini la quantità relativamente ad una lettera, come è stato detto al numero 24.; si riducano i termini alla medesima denominazione, se vi sono frazioni, indi si trovino tutti i divisori dell' ultimo termine composti dai divisori numerici, se vi sono, e dalla lettera di una dimensione, e se il massimo termine â coefficiente numerico, si dividano per ciascheduno di que' numeri, per i quali è divisibile esso coefficiente del massimo termine; per ognuno di questi divisori aggiunto, ed indi sottratto dalla lettera, per cui è ordinata la formola, si tenti la divisione; e tutti quelli, per i quali riesce, saranno tanti divisori della quantità proposta.

Sia la formola $y^3 - 4ayy + 5aay - 2a^3 = 0$. I divisori di una dimensione dell'ultimo termine sono $a$, $2a$. Devesi adunque provare la divisione per ciascun di questi aggiunto alla lettera $y$, indi sottratto (giacchè il coefficiente del massimo termine $y^3$ è l'unità) cioè per $y \pm a$, per $y \pm 2a$. Si divida primieramente per $y - 2a$, ed il quoziente è $yy - 2ay + aa$, che pure è divisibile per $y - a$ dando di quoziente $y - a$, quindi i divisori della proposta formola sono $y - a$, $y - a$, $y - 2a$, dal prodotto de' quali è nata.

Sia la formola $6y^4 - ay^3 - 21aayy + 3a^3y + 20a^4$. I divisori d'una dimensione dell'ultimo termine sono $a$, $2a$, $4a$, $5a$, $10a$, $20a$; e perchè il primo termine $6y^4$ è divisibile per 2, e per 3, si dovrà tentare la divisione per $y \pm \frac{a}{2}$, $y \pm a$, $y \pm 2a$, $y \pm \frac{5a}{2}$, $y \pm 5a$, $y \pm 10a$, $y \pm \frac{a}{3}$, $y \pm \frac{2a}{3}$, $y \pm \frac{4a}{3}$, $y \pm \frac{5a}{3}$, $y \pm \frac{10a}{3}$, $y \pm \frac{20a}{3}$. Ma per-perchè troppo nojosa fatica sarebbe il provare con tutti i divisori, per vedere fra i molti, quali debbansi scegliere; si faccia $y = z + a$, e si sostituisca in luogo di $y$, e sue potestà questo valore, e nascerà un'altra formola, cioè

$$\begin{array}{rrrrr} 6z^4 + 24az^3 + 36aazz + 24a^3z + 6a^4 \\ - \quad az^3 - 3aazz - 3a^3z - a^4 \\ - 21aazz - 42a^3z - 21a^4 \\ + 3a^3z + 3a^4 \\ + 20a^4 \end{array}$$

ovvero, ciò che è lo stesso,

$$6z^4 + 23az^3 + 12aazz - 18a^3z + 7a^4$$

Dell'ultimo termine $7a^4$ di questa formola si trovino tutti i divisori, cioè $a$, e $7a$, che divisi per 2, e per 3 fanno $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{7a}{2}$, $\frac{7a}{3}$, e perchè si è fatto $y = z + a$, se questi divisori possono servire per la seconda formola data per $z$, serviranno anche per la prima data per $y$ quando si accrescano della quantità $a$, cioè facendo $\frac{3a}{2}$, $\frac{4a}{3}$, $\frac{9a}{2}$, $\frac{10a}{3}$. Questi divisori adunque si paragonino

coi

coi divisori per la prima formola, e scelti quelli soli, che tra loro convengono, cioè $\frac{4a}{3}$, e $\frac{10a}{3}$, per questi aggiunti, e sottratti dalla $y$ si tenti la divisione, che succede per $y+\frac{4a}{3}$. Ma se, ciò non ostante, rimangono ancora molti di numero i divisori scelti da questo paragone, si faccia $y=z-a$, e nascerà un'altra formola. Dai divisori ritrovati per questa si sottragga la quantità $a$, indi si paragonino con quelli, che si sono scelti per mezzo della seconda, e per quelli che convengono, che saranno in minor numero, si tenti la divisione. In questo modo operando successivamente con altre sostituzioni di $y=z+2a$, $y=z-2a$ ec. si potranno ridurre a quel minor numero, che sembrerà bastare.

57. Quando la proposta formola â il massimo termine moltiplicato per qualche numero, in luogo di usare della regola accennata per questo caso, può tornare più comodo il mutare la formola in un'altra, il di cui primo termine non sia moltiplicato, che per l'unità, ed indi ritrovare di questa i divisori, dai quali passare poi a quelli della proposta formola.

Sia per esempio la formola $3y^3+9ayy-12aay-12aab.$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +3byy+9aby$

Si faccia $3y=z$ (e generalmente $ny=z$, posto il coefficiente numerico dell' incognita eguale ad $n$) e però $y=\frac{z}{3}$, e sostituiti in luogo di $y$, e sue potestà i valori dati

per z, sarà la formola:

$\frac{z^3 + 9azz + 3bzz - 36aaz + 27abz - 108aab}{9}$. Si trovino i divisori di questa (ommesso per ora il denominatore 9) che saranno $z + 12a$, $z - 3a$, $z + 3b$, e mettendo in conto il denominatore 9, se ne divida uno per 9, ovvero due per 3, e saranno, per esempio, $z + 12a$, $\frac{z - 3a}{3}$, $\frac{z + 3b}{3}$; ma si è fatto $3y = z$, adunque si sostituisca nei divisori in luogo di z questo valore, ed averansi $3y + 12a$, $y - a$, $y + b$, che sono i tre divisori della formola proposta:

$$\begin{aligned} 3y^3 + 9ayy &- 12aay - 12aab. \\ + 3byy &+ 9aby \end{aligned}$$

CAPO

## CAPO II.

*Delle Equazioni, e de' Problemi piani determinati.*

58. EQuazione è un rapporto di uguaglianza, che due, o più quantità, fieno effe numeriche, geometriche, o fifiche, ânno tra loro affieme paragonate, o che ânno col zero fe ad effo fi paragonano. Il compleffo di tutti que' termini, che avanti al fegno d'egualità fi fcrivono, chiamafi il primo membro dell'equazione, ed il compleffo di tutti quelli, che fi fcrivono dopo, chiamafi il fecondo membro, ovvero l'omogeneo di comparazione. I termini dell'equazione fono omogenei quando ciafcun di loro è della fteffa dimenfione, e però fi dice efferfi nell'equazione offervata la legge degl'omogenei, come nell'equazione $axx - bbx = a^3$, e così all'oppofto dicefi non efferfi offervata la legge degl'omogenei quando i termini tali non fono, come nell'equazione $x^4 - axx = a$.

59. Problema è una propofizione, in cui fi domanda di fare, o di fapere alcune cofe per mezzo di altre cofe note, e di alcune condizioni, che fi chiamano i dati del problema; ficcome quelle, che fi cercano, i quefiti o queftioni fi appellano.

60. I Problemi altri fono determinati, altri indeterminati; determinati fono quelli, che ânno foluzioni di numero finito, e determinato, cioè quelli, che o con una fola

sola determinazione si possono sciorre, o se con più, di numero però finito, e determinato. Tale sarebbe il ricercare ( *Fig.* 1. ) dove debbasi tagliare la data retta $AB$ in modo, che tutta abbia al maggior segmento quella ragione, che â il maggior segmento al minore; imperciocchè un solo punto in essa può darsi, per esempio $C$, onde nasca la proprietà, che si cerca. Lo stesso ( *Fig.* 2. ) sarebbe il ricercare nel diametro di un dato semicircolo $AED$ quel punto, per esempio $C$, da cui alzando una perpendicolare $CE$ terminata alla periferia, sia essa eguale alla terza parte del diametro, mentre due soli di questi punti egualmente lontani dal centro soddisfanno alla questione.

Che se verrà proposto di cercare fuori della data $AD$ un punto $E$ tale, che da esso condotte all'estremità della data $AD$ le rette $EA$, $ED$, sia l'angolo $AED$ retto; si troverà, che infiniti sono i punti $E$, che sciolgono il problema, cioè tutta la periferia $AED$, come è noto dall' Euclide; medesimamente se si cerchi nel diametro $AD$ un punto $C$, da cui alzata la perpendicolare $CE$ nel circolo, essa sia media proporzionale tra i segmenti $AC$, $CD$, si troverà, che ogni punto del diametro scioglie la questione, e perchè tali punti sono infiniti, infinite sono le soluzioni del problema, che però dicesi indeterminato.

I problemi determinati di una sola incognita ânno bisogno, gl'indeterminati di due; la maniera però di arrivare all'equazione è la stessa in quelli, ed in questi; ma de'

de' ſecondi tratterò particolarmente al Capo terzo.

61. Le quantità cognite, e date ſoglionſi denominare, come altrove ſi è detto, con le prime lettere dell'alfabeto; le incognite, e che ſi cercano, con una delle ultime avvertendo, che ſe la quantità, che ſi cerca, è una linea, debba eſſa avere ſempre origine e principio da un punto fiſſo, e determinato. E comecchè ciò, che ſi cerca, ſi ſuppone già per fatto, e noto col chiamarlo, per eſempio, $x$; quindi è, che da queſta quantità ſuppoſta cognita vengono cognite e date, come ſi ſuol dire, *per l'Ipoteſi*, altre che da queſta dipendono. Così eſſendo ( *Fig.* 2. ) data $AD=a$, e ſuppoſto $C$ il punto cercato, e però chiamata $AC=x$, ſarà $CD=a-x$, e così ſi diſcorra di molte altre. In oltre ſebbene molte quantità non ſono eſpreſſamente date, qual'è la linea $AD$, lo ſono però implicitamente, e come ſi dice, *per la coſtruzione*. Così nel triangolo rettangolo $AED$ ( *Fig.* 2. ) quando ſia data l'ipotenuſa $AD=a$, il lato $ED=b$, ſarà, per la 47. del primo di Euclide, dato pure il lato $AE=\sqrt{aa-bb}$. Così nel ſemicircolo $AED$; dato il diametro $AD=a$, il ſegmento $AC=b$, ſarà $CD=a-b$, e per la 8. del 6. di Euclide ſarà $CE=\sqrt{ab-bb}$; o pure chiamata $AC=x$, ſarà $CE=\sqrt{ax-xx}$ data per l'ipoteſi, e per la coſtruzione. Così nel triangolo rettangolo ( *Fig.* 3. ) $ACB$; abbaſſata dall'angolo retto $B$ la perpendicolare $BD$, ſe ſieno, per eſempio, date le due $AC=a$, $AB=b$, ſaranno

pari-

parimente date tutte l'altre $BC$, $BD$, $AD$, $DC$; cioè $CB = \sqrt{aa - bb}$ per la 47. del primo d'Euclide, come si è veduto, e per l'8. del 6. sarà $CD$ terza proporzionale di $AC$, e di $CB$; quindi sarà $= \frac{aa - bb}{a}$, per la 17. dallo stesso lib. $AD$ sarà terza proporzionale di $AC$, e di $AB$; e però $= \frac{bb}{a}$; $DB$ sarà media tra $AD$, e $DC$, o pure quarta proporzionale di $AC$, $CB$, $AB$; e però, per la 16. dello stesso libro, $= \frac{b\sqrt{aa - bb}}{a}$. Così ( *Fig.* 4. ) nel triangolo rettangolo $ABC$; se sia $DH$ parallela a $BC$, e siano date $AB = a$, $BC = b$, $AD = x$, per la 4. del sesto saranno date $DH = \frac{bx}{a}$, $AH = \frac{x\sqrt{aa + bb}}{a}$, e così dicasi d'infinite altre.

62. Col supporre adunque già fatto, o noto ciò, che deve farsi, o sapersi, e maneggiando indifferentemente le quantità date, e quesite, si adempiano tutte le condizioni, che nella proposizione del problema si dimandano, e si arriverà alla equazione. Sia, come sopra, la retta $AB$ ( *Fig.* 1. ) che debbasi tagliare *extrema & media ratione*. Sia $AB = a$, e sia $C$ il punto, che si cerca; sarà $AC = x$, e però $CB = a - x$. La condizione impostaci è, che debba essere $AB, AC :: AC, CB$, cioè $a, x :: x, a - x$; ma per la natura della proporzione geometrica il prodotto degl'estremi è uguale al prodotto dei mezzi; adunque sarà $aa - ax = xx$, ed eccoci all'equazione. Sieno dati tre numeri,

meri, il primo ſia 4., il ſecondo 5., il terzo 10., e ſi cerchi un quarto numero tale, che ſe dal prodotto di queſto nel terzo ſi ſottragga il primo, ed il reſto per eſſo primo ſi divida; il quoziente ſia eguale al ſecondo numero dato. Sia $x$ il numero cercato; adunque il prodotto di queſto nel terzo ſarà $10x$, e ſottraendo il primo, $10x - 4$, e dividendo per eſſo primo, $\frac{10x-4}{4}$, ma per la preſcrizione del problema deve eſſere $\frac{10x-4}{4}$ eguale al ſecondo numero dato 5; ecco adunque l'equazione $\frac{10x-4}{4} = 5$.

Dati nel triangolo $ABC$ (*Fig.* 4.) i lati $AC = a$, $BC = b$, e la baſe $AB = c$; ſi ricerca in eſſa il punto $D$ tale, che alzata $DH$ parallela a $BC$, ſia il quadrato di $DH$ eguale al rettangolo di $AD \times DB$. Si chiami $AD = x$, adunque ſarà $DB = c - x$, e per i triangoli ſimili $ABC$, $ADH$ ſarà $DH = \frac{bx}{c}$, e però adempiendo ciò, che il problema richiede, ſarà l'equazione $\frac{bbxx}{cc} = cx - xx$.

63. Se il dato triangolo $ABC$ ſarà rettangolo in $B$ non s'avrà a denominare $AC = a$, ma bensì $= \sqrt{bb + cc}$ per eſprimere con ciò la condizione data dell'angolo retto. Così ſe nel ſemicircolo $AED$ (*Fig.* 2.) ſarà dato il diametro $AD = 2a$, il ſegmento $AC = b$, non però, perchè ſia data in conſeguenza la $CE$, ſi potrà eſprimere con una qualunque lettera, ma dovrà denominarſi per la

K pro-

proprietà del circolo col farla $= \sqrt{2ab - bb}$ appunto per indicare, che essa sia ordinata del circolo al punto $C$; e ciò generalmente s'intenda doversi fare in tutti i casi di simil natura.

64. Ma ciò, che può fare qualche difficoltà si è, che il più delle volte le linee date nella figura, con cui viene proposto il problema, non bastano per avere quelle quantità, o sia denominazioni, che sono necessarie per giugnere alla equazione. Un tale caso sarebbe, se date di posizione (*Fig.* 5.) due rette indefinite $AE$, $AF$, ed il punto $C$, venisse proposto di condurre dal punto dato $C$ la retta $CF$ talmente, che formasse il triangolo $AEF$ eguale a un dato piano. La espressione del triangolo $AEF$ sarebbe la metà del prodotto di $AF$ in $EG$, abbassata $EG$ perpendicolare ad $AF$; sia adunque $AF = x$, ma non perciò sarà mai possibile inferire dalle sole descritte linee il valore di essa $EG$. In simili incontri fa d'uopo di comporre la figura conducendo parallele, alzando perpendicolari, formando triangoli simili, descrivendo circoli, o usando altri simili artifizj della Geometria comune, de' quali non è possibile assegnare regola alcuna, dipendendo essi dalle circostanze del problema, dall'industria, dalla pratica, e spesso dal caso; ordinariamente però sogliono servire le proposizioni 5. 13. 15. 27. 29. 32. 47. del primo libro di Euclide; alcune del secondo; le 20. 21. 22. 27. 31. 35. 36. del terzo; le 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. del sesto; ed alcune dell'undecimo, e duodecimo per i solidi. Nel pro-

propoſto problema adunque dal punto dato $C$ ſi conduca $CD$ parallela ad $EA$, ed $EG$, $CB$ perpendicolari ad $FA$ prodotta. Poichè ſono date di poſizione le rette $AE$, $AF$, ed il punto $C$, ſaranno date di grandezza le $AD$, $CB$. Sia adunque $AD = a$, $CB = b$, $AF = x$, ed il dato piano $= cc$. Poichè i triangoli $FDC$, $FAE$ ſono ſimili, come pure ſimili tra loro i triangoli $DCB$, $AEG$, ſaranno le analogie $DF$, $AF :: DC$, $AE :: BC$, $EG$; e però $DF$, $AF :: BC$, $EG$, cioè $a + x$, $x :: b$, $EG$, onde ſarà $EG = \frac{bx}{a + x}$, e perchè il triangolo $AEF$, cioè la metà del prodotto di $AF$ in $EG$ deve eſſere eguale al dato piano $cc$; ſarà finalmente l'equazione $\frac{bxx}{2a + 2x} = cc$.

65. La ſola propoſizione de' problemi, che fin quì ho preſi per eſempio, mi â immediatamente portata all' equazione appunto, perchè mi â comandato di fare, che due quantità foſſero uguali; ma non così ſuccede quando da alcune quantità date viene propoſto di ritrovarne dell' altre ſenza qualche condizione, che eſpreſſamente all' equazione ci porti. Allora conviene con un pó d'arte procacciarſela, e ciò col ritrovare (componendo la figura, ſe è neceſſario) per mezzo di diverſe proprietà, due differenti eſpreſſioni della medeſima quantità, ed inſtituire fra eſſe l'equazione. Ho detto per mezzo di diverſe proprietà, perchè la ſteſſa proprietà comunque ſi vuole maneggiata darà ſempre la medeſima eſpreſſione. Addurrò tre

esempj, che per ora possono bastare.

Dato il triangolo $CDB$ isoscele; (*Fig.* 6.) si dimanda il diametro del circolo $CADB$, a cui egli sia inscritto. Si faccia $CD = a$, $CB = BD = b$, $BA = x$, diametro ricercato, e si tiri la $CA$. Saranno simili i due triangoli $ABC$, $BCE$, per esser retti gl'angoli $BCA$, $CEB$, e però sarà $AB$, $BC :: BC$, $BE$; cioè $x, b :: b, BE$; onde $BE = \frac{bb}{x}$, ed è pure $CE$ la metà di $CD$, onde $= \frac{1}{2}a$, e per l'angolo retto $CEB$ sarà $\overline{CB}^2 = \frac{aa}{4} + \frac{b^4}{xx}$; ma il quadrato di $CB$ è anche $= bb$, e però sarà l'equazione $bb = \frac{aa}{4} + \frac{b^4}{xx}$.

Dati nel triangolo $ABC$ (*Fig.* 7.) i tre lati, ed abbassata la perpendicolare $AE$ sopra $BC$ dall'angolo $A$, si domandano i due segmenti $BE$, $EC$. Sia $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $BE = x$, sarà $EC = c - x$. Per la 47. del primo d'Euclide sarà il quadrato di $AE$ uguale al quadrato di $AB$ meno il quadrato di $BE$, cioè $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$; ma per la stessa sarà pure $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{EC}^2$, adunque $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2$, e poste l'espressioni algebraiche, sarà $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$.

In altro modo ancora. Si conduca $EF$ perpendicolare ad $AB$. Per l'8. del 6. d'Euclide sarà $AB$, $BE :: BE$, $BF$, cioè $a, x :: x$, $BF$, e però $BF = \frac{xx}{a}$; adunque

$AF =$

$AF = a - \frac{xx}{a}$; ma per la ſteſſa propoſizione 8. ſarà pure $AF$, $AE :: AE$, $AB$, e però ſarà $\overline{AE}^2 = aa - xx$. Condotta dal punto $E$ la retta $EM$ perpendicolare ad $AC$, con lo ſteſſo raziocinio ſi troverà $\overline{AE}^2 = bb - cc + 2cx - xx$, e paragonati fra loro queſti due valori, avraſſi l'equazione, come prima, $aa - xx = bb - cc + 2cx - xx$.

Dato il quadrante $AHM$ (*Fig.* 8.) e le tangenti $AI$, $HK$ dei due archi $AH$, $HD$; ſi dimanda la tangente $AB$ della ſomma de' due archi dati. Sia il raggio $CA = a$, $AI = b$, $HK = c$, $AB = x$. Per avere una equazione ſi tiri normale ſopra $AC$ dal punto $D$ la $DE$; quindi per i triangoli ſimili $CBA$, $CDE$ ſi troveranno i valori di $CE$, e di $DE$; ſi procuri adunque di vedere, ſe ci venga fatto di denominare in un' altra maniera la ſteſſa $DE$; e perciò ſi tiri $DF$ perpendicolare a $CH$; e per mezzo de' triangoli ſimili $CAI$, $CEO$ ſi averanno le $EO$, $CO$; ſimilmente per mezzo de' triangoli $CHK$, $CFD$ ſimili averaſſi la $FD$; e dai triangoli ſimili $CEO$, $FOD$ ſi caverà $OD$; e però ſarà $ED = EO + OD$, che ci darà l'equazione analitica.

'O riferito il ſolo ordine, che potrebbe tenerſi per giugnere all' equazione, ommettendo le attuali operazioni, perchè in altro luogo ſi ſcioglierà il problema compitamente.

*66.* Conviene pure uſare qualche ſorta d'induſtria per giugnere all'equazione in que' Problemi, ne' quali ſi

tratta

tratta di angoli, e ciò con l'artifizio di passare dalle proprietà degl'angoli a quelle delle linee, che entrano, o possono entrare nel problema. Ne prendo un' esempio dalla proposizione 10. del lib. 4. d'Euclide. Debbasi (*Fig.* 9.) sopra la retta $AB$ costruire il triangolo $ABC$, il di cui angolo $A$ sia la metà tanto dell'angolo $ABC$, quanto dell' angolo $ACB$. Il triangolo $ABC$ sia il ricercato, adunque saranno tra loro eguali i due angoli $ACB$, $ABC$, quindi eguali i lati $AC$, $AB$, e se s'intenda condotta la retta $CD$ tale, che divida in due egualmente l'angolo $ACB$, saranno simili i due triangoli $ACB$, $CDB$, e si avrà l'analogia $AB, BC :: BC, BD$, ma si â $BC = DC = AD$, adunque sarà $AB, AD :: AD, DB$, ed ecco ridotto il problema proposto all'altro di dividere la data $AB$ *extrema & media ratione*. Sciolto pertanto questo secondo problema, cioè ritrovato il punto $D$, sarà sciolto il proposto ancora, perchè divisa $DB$ per metà in $E$, se si alzerà la perpendicolare $EC$, che incontri in $C$ l'arco $BC$ del raggio $AB$, e si conducano dal punto $C$ le rette $CA$, $CB$, il triangolo $ACB$ sarà il ricercato.

67. Ritrovata adunque l'equazione del problema, fa d'uopo da essa ricavare i valori della incognita, cioè ridurre essa incognita ad essere eguale a sole quantità date, nel che consiste la soluzione del problema, e ciò dicesi risolvere l'equazione.

Ma prima è bene richiamare alla memoria alcuni assiomi; cioè

1. Se a due cose eguali si aggiungeranno, o da esse si sottrarranno cose eguali, le somme, o differenze saranno parimente eguali.

2. Se cose eguali si moltiplicheranno, o si divideranno per cose eguali, i prodotti, o i quozienti saranno eguali.

3. Se da cose eguali si caverà radice di indice eguale, i risultanti saranno eguali.

4. Se cose eguali si eleveranno a potestà di esponente eguale, i risultanti saranno eguali.

Dal primo di questi assiomi si ricava, che se si vorrà, che un qualunque termine dell'equazione, il quale sia da una parte del segno d'egualità, passi dall'altra, si potrà sempre farlo senza punto togliere l'eguaglianza. Sia l'equazione $ax + bb = -xx + cc$; si aggiunga $xx$ all'uno, ed all'altro membro dell'equazione, sarà $ax + bb + xx = -xx + cc + xx$, ma $-xx + xx$ si elidono, e rimane $ax + bb + xx = cc$; ed ecco il termine $xx$ passato nel primo membro dell'equazione, da cui se in oltre si sottrarrà $bb$, sarà $ax + bb + xx - bb = cc - bb$; ma $bb - bb$ si elidono, e rimane $ax + xx = cc - bb$, ed ecco il termine $bb$ passato nel secondo membro dell'equazione. Adunque generalmente quando vogliasi, che un qualunque termine passi da una parte all'altra del segno d'egualità, basterà scriverlo nell'altra con mutargli il segno. In conseguenza di ciò si potrà adunque rendere a nostro talento positivo un qualunque termine, che nell'equazione sia negativo, e vicendevolmente; e ciò con lo scriverlo col segno mutato

dalla

dalla opposta parte del segno d'egualità a quella, in cui si trova; e però $aa - xx = bb$ sarà lo stesso, che $aa - bb = xx$, o sia $xx = aa - bb$. Quindi se nell'uno, e nell'altro membro dell'equazione vi sarà lo stesso termine, ed affetto dal medesimo segno, potrà esso da ambi i membri cancellarsi, senza togliere l'eguaglianza, come se fosse $ax - xx = bb - xx$, si scriverà $ax = bb$; imperciocchè trasportando dalla opposta parte il termine $-xx$, sarebbe $ax - xx + xx = bb$, o pure $ax = bb - xx + xx$, ma $-xx$ e $+xx$ si elidono; adunque sarà $ax = bb$. Lo stesso segue se in luogo di trasportare il termine ad ambi i membri comune, esso ad ambi si aggiunga, se nell'equazione è negativo, o si sottragga, se è positivo; così se è $ax - xx = bb - xx$, sarà anche $ax - xx + xx = bb - xx + xx$, cioè $ax = bb$.

68. Dal secondo assioma si ricava, che se un'equazione averà delle frazioni si potrà sempre, senza togliere l'egualità, da esse liberare con ridurre ciascun termine al comun denominatore, ed indi ommettere esso denominatore, appunto perchè quantità eguali per eguali moltiplicate fanno prodotti eguali. Sia $a - \frac{xx}{b} = b$; riducendo al comune denominatore sarà $\frac{ab - xx}{b} = \frac{bb}{b}$, e moltiplicando ambi i membri dell'equazione per $b$, cioè ommettendo esso denominatore $b$, sarà $ab - xx = bb$. E se in oltre si voglia, che il termine $-xx$ sia positivo, si farà $ab = bb + xx$, o sia (che è lo stesso) $xx + bb = ab$, o pu-

re

re $xx = ab - bb$. Sia $\frac{ax}{2} - \frac{bxx}{a} = ab$, riducendo al comune denominatore sarà $\frac{aax - 2bxx}{2a} = \frac{2aab}{2a}$, e moltiplicando l'uno, e l'altro membro per $2a$; averassi $aax - 2bxx = 2aab$. E se si voglia di più, che il termine $2bxx$ sia positivo, e in oltre che tutti i termini, i quali contengono la lettera $x$, sieno da una parte del segno d'egualità, si faccia $2bxx - aax = -2aab$, o riducendo l'equazione al zero, $2bxx - aax + 2aab = 0$.

69. Per lo stesso assioma si potrà liberare qualunque lettera, a piacere, nell'equazione, o sua potestà dal coefficiente, cioè da quella quantità, in cui essa sia per avventura moltiplicata, e ciò dividendo ciascun termine per esso coefficiente: Sia pertanto $2bxx - aax = -2aab$, e debbasi liberare $xx$ dal coefficiente $2b$; adunque dividendo l'uno, e l'altro membro dell'equazione per la stessa quantità $2b$, i quozienti saranno eguali, cioè $\frac{2bxx - aax}{2b} = \frac{-2aab}{2b}$, e però $xx - \frac{aax}{2b} = -aa$. Sia $ax - \frac{a^3}{b} = bb - \frac{3bxx}{2a} - bx$, e si voglia, che la $xx$ sia positiva, libera dalle frazioni, e da' coefficienti, e che tutti i termini, che in qualunque modo contengono la lettera $x$, sieno da una parte del segno d'egualità, e gli altri dall'altra. Si scriva adunque $\frac{3bxx}{2a} + bx + ax = bb + \frac{a^3}{b}$; si moltiplichi per $2a$ ciascun ter-

mine, e viene l'equazione $3bxx + 2abx + 2aax = 2abb + \frac{2a^4}{b}$,

si divida finalmente ciascun termine per $3b$, e sarà l'equazione $xx + \frac{2abx + 2aax}{3b} = \frac{2a^4}{3bb} + \frac{2ab}{3}$, che â tutte le condizioni ricercate.

70. Dal quarto assioma si ricava, che se una equazione conterrà radicali, o sordi, si potrà da essi liberare scrivendo il termine, o i termini sordi da una parte del segno d'egualità, ed i razionali dall'altra, indi facendo il quadrato dell' uno, e dell' altro membro dell' equazione, se la radice è quadrata; il cubo se è radice cuba ec. Così essendo $\sqrt{aa - xx} + a = x$ si scriva, posto il termine $a$ dall' altra parte del segno d'egualità, $\sqrt{aa - xx} = x - a$, e però quadrando, $aa - xx = xx - 2ax + aa$; cioè $2xx - 2ax = 0$, o sia $x - a = 0$, dividendo per $2x$ comune ad ambi i membri; Così essendo $\sqrt[3]{aax - x^3} - a + x = 0$; si scriva $\sqrt[3]{aax - x^3} = a - x$, e fatti i cubi, sarà $aax - x^3 = a^3 - 3aax + 3axx - x^3$, cioè $3axx - 4aax + a^3 = 0$, o sia $3xx - 4ax + aa = 0$, dividendo per $a$.

Che se i termini radicali fossero due o più, onde in una operazione sola non sparissero, essa si ripeta fino che bisogna. Così $\sqrt{bx} = a + \sqrt{ax}$ si scriva $\sqrt{bx} - \sqrt{ax} = a$, e quadrando, $bx + ax - 2\sqrt{abxx} = aa$, cioè $bx + ax - aa = 2\sqrt{abxx}$, e di nuovo quadrando, $bbxx + aaxx + a^4 + 2abxx - 2aabx - 2a^3x = 4abxx$, cioè $bbxx - 2abxx +$

aaxx —

$aaxx - 2aabx - 2a^3x + a^4 = 0$. Così $y = \sqrt{ay + yy - a\sqrt{ay - yy}}$, quadrando, farà $yy = ay + yy - a\sqrt{ay - yy}$; cioè $ay = a\sqrt{ay - yy}$, e di nuovo quadrando, $aayy = a^3y - aayy$, vale a dire $2aayy = a^3y$, o fia $2y = a$.

71. Premeffe quefte cofe, è facile la maniera di rifolvere le equazioni per avere in quantità date il valore della incognita, che ferve alla foluzione del problema. Ma prima fi fuppongano le equazioni liberate dalla afimmetria, cioè da' radicali nel cafo, che l'incognita foffe fotto al vincolo, ed indi ridotte all' efpreffione più femplice cancellando que' termini, che fi elidono, fe tali ne aveffe; fe l'uno e l'altro membro foffero per la fteffa quantità moltiplicati, dividendoli; o fe foffero divifi, per effa moltiplicandoli; come, per efempio, fe foffe $\frac{axx - aax + aab}{b} = \frac{a^3 + aab}{b}$ fi ridurrebbe ad effere $xx - ax = aa$. In oltre per primo termine dell' equazione fi intenda il compleffo di tutti i termini, che contengono l'incognita alla maffima poteftà; per fecondo termine il compleffo di tutti i termini, che contengono la incognita alla poteftà di un grado inferiore, e così di mano in mano; e per termine cognito il compleffo di tutti i termini, che in neffun modo effa incognita contengono. Quindi nell' equazione $axx - bxx - bbx - aax = a^3 - b^3$, o fia $axx - bxx - bbx - aax + b^3 - a^3 = 0$, farà $axx - bxx$, cioè $xx \times \overline{a - b}$ il primo termine; $-bbx - aax$, cioè

$x \times \overline{-aa - bb}$ il ſecondo ; $-a^3 + b^3$ il cognito. Nell'equazione $aaxx - abxx + a^4 - b^4 - a^3b = 0$ ſarà $\overline{aa - ab} \times xx$ il primo termine ; il ſecondo manca ; ed $a^4 - b^4 - a^3b$ il cognito. Nell'equazione $ax^3 + bx^3 - aaxx - a^4 = 0$ ſarà $\overline{a + b} \times x^3$ il primo ; $-aaxx$ il ſecondo ; il terzo manca ; e $-a^4$ l'ultimo, o il cognito; e così dicaſi dell'altre equazioni. E quì deveſi notare, che il termine, per eſempio, $aaxx - bbxx$ (il che s'intenda di qualunque altro compoſto di ſegni contrarj) può eſſere quantità poſitiva, o negativa, e ſarà poſitiva ſe $aa$ ſia maggiore di $bb$, negativa ſe all'oppoſto ; e però ſe ſi dirà in appreſſo di rendere poſitivo un ſimil termine nell'equazione, biſognerà a ciò avere riguardo.

72. Ciò poſto ; per riſolvere le equazioni, in primo luogo ſe l'equazione â frazione, nel di cui denominatore ſia l'incognita, ſi riduca al comun denominatore ; in ſecondo luogo ſi renda poſitivo il termine della maſſima poteſtà dell' incognita, e ſcritti da una parte del ſegno d'egualità tutti i termini nell'ordine loro, che contengono eſſa incognita, ſi ſcrivano dall'altra i cogniti ; in terzo luogo ſe il primo termine, cioè quello della maſſima poteſtà dell'incognita, aveſſe un denominatore, ſi liberi dalla frazione nel modo detto al num. 68., e finalmente ſe aveſſe coefficiente, cioè ſe foſſe moltiplicato in qualche quantità data, da eſſo coefficiente ſi liberi (n. 69.)

E' facile il vedere, che in queſta guiſa operando, ſe l'equa-

l'equazione avrà l'incognita a una ſola dimenſione, ſarà ella anco interamente riſoluta, e ridotta la ſteſſa incognita eguale a ſole quantità date, che è quanto ſi pretende di fare. Sia l'equazione $aa - ff = \frac{bbx - aax}{2m}$, e ſia $aa$ maggiore di $bb$. Per rendere poſitivo adunque il termine dell'incognita ſi ſcriva $\frac{aax - bbx}{2m} = ff - aa$, e liberando dal denominatore, e coefficiente, ſarà $x = \frac{2m \times \overline{ff - aa}}{aa - bb}$, valore interamente cognito. Se foſſe $aa$ minore di $bb$, in queſto caſo il termine dell'incognita $\frac{bbx - aax}{2a}$ ſarebbe poſitivo, nè occorrerebbe traſportarlo, e ſi avrebbe $x = \frac{2m \times \overline{aa - ff}}{bb - aa}$.

73. Anzi quando anche l'incognita ſia elevata a qualunque poteſtà, purchè alla ſteſſa in tutti i termini ne' quali ſi trova, cioè (che vuol dire lo ſteſſo) purchè l'incognita formi un ſol termine, per l'aſſioma 3. ſi riſolverà l'equazione, e ſi avrà eſſa incognita eguale a ſole quantità date col eſtrarre dall'uno, e dall'altro membro dell'equazione la radice di quell'indice, di cui è la poteſtà. Sia l'equazione $bb = aa - \frac{axx - bxx}{2c}$. Per rendere poſitivo il termine dell'incognita ſi ſcriva $\frac{axx + bxx}{2c} = aa - bb$, e liberando dalla frazione, e dal coefficiente, $xx = \frac{2c \times \overline{aa - bb}}{a + b}$,

cioè

cioè $xx = 2ac - 2bc$, faccendo l'attual divifione per $a + b$, giacchè fi può, e finalmente cavando la radice quadrata, farà $x = \pm\sqrt{2ac - 2bc}$. Ho pofto alla radice il fegno ambiguo per ciò, che fi è detto al num. 15. Per la fteffa ragione fe foffe $x^3 = a^3 + b^3$, fi averebbe $x = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$, e così dell'altre generalmente.

74. Ma fe l'equazione contiene l'incognita al quadrato elevata, e in oltre il rettangolo, o fia il prodotto della fteffa incognita nelle quantità note, cioè il fecondo termine, (e dicefi equazione di quadratica affetta, ficcome quando manca il fecondo termine di quadratica femplice fi appella) preparata effa come fi è detto, all'uno, ed all'altro membro della equazione fi aggiunga il quadrato della metà del coefficiente del fecondo termine (vale a dire il quadrato della metà di quella quantità cognita intera, o rotta, che moltiplica la incognita) ed il primo membro, come è manifefto, farà fempre un quadrato, la di cui radice farà il compleffo dell'incognita, e della metà di effo coefficiente con il fuo fegno naturale; e però eftraendo la radice, quefto compleffo farà eguale alla radice quadrata del fecondo membro, e trafportando la metà del coefficiente, come quantità cognita, farà finalmente la incognita eguale alla fomma, o differenza (fecondo la natura de' fegni) della radicale, e di effa metà del coefficiente. Sia l'equazione $xx + 2ax = bb$; fi aggiunga all'uno, ed all'altro membro il quadrato della

metà

metà del coefficiente del secondo termine, cioè $aa$, e sarà $xx + 2ax + aa = aa + bb$, e cavando la radice, $x + a = \pm\sqrt{aa + bb}$, e trasponendo, $x = \pm\sqrt{aa + bb} - a$.

Sia l'equazione $bbx - aax - mxx + \frac{aabb}{m} = 0$. Rendendo positivo il massimo termine, ed ordinando l'equazione, sarà $mxx + aax - bbx = \frac{aabb}{m}$, e dividendo per $m$, $xx + \frac{aax - bbx}{m} = \frac{aabb}{mm}$; adunque aggiungendo ad ambi i membri il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm}$, si avrà $xx + \frac{aax - bbx}{m} + \frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm} = \frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm} + \frac{aabb}{mm}$, e cavando la radice, $x + \frac{aa - bb}{2m} = \pm\sqrt{\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4mm} + \frac{aabb}{mm}}$, e riducendo al comune denominatore il radicale, e trasponendo il termine cognito $\frac{aa - bb}{2m}$, sarà $x = -\frac{aa + bb}{2m} \pm\sqrt{\frac{a^4 + 2aabb + b^4}{4mm}}$; ma la radice si può attualmente estrarre, ed è tanto $\frac{aa + bb}{2m}$, quanto $-\frac{aa - bb}{2m}$, per ragione del segno ambiguo $\pm$, e però saranno due i valori della $x$, uno $x = \frac{-aa + bb + aa + bb}{2m}$, o sia $x = \frac{bb}{m}$, e l'altro $x = \frac{-aa + bb - aa - bb}{2m}$, o sia $x = -\frac{aa}{m}$.

75. L'ambiguità adunque del segno, che seco porta la

la eſtrazione della radice quadrata, ſomminiſtra due valori dell'incognita, i quali poſſono eſſere ambi poſitivi, ambi negativi, un poſitivo, e negativo l'altro, e talora ambi immaginarj, ſecondo le quantità note onde ſono compoſti. Nell' equazione finale, per eſempio, $x = \pm\sqrt{aa+bb} - a$ un valore, cioè $\sqrt{aa+bb} - a$ ſarà poſitivo, perchè eſſendo $\sqrt{aa+bb}$ maggiore di $a$, la differenza è poſitiva; l'altro valore, cioè $-\sqrt{aa+bb} - a$ ſarà negativo, come è manifeſto. Nell'equazione $x = a \pm \sqrt{aa-bb}$ (ſuppoſto $b$ minore di $a$) ambi i valori ſaranno poſitivi, perchè $\sqrt{aa-bb}$ è minore di $a$; e per la ſteſſa ragione nell'equazione $x = \pm\sqrt{aa-bb} - a$ ambi i valori ſaranno negativi; che ſe foſſe $b$ maggiore di $a$, ambi ſarebbero immaginarj, come ô notato al n. 15., perchè $\sqrt{aa-bb}$ ſarebbe radice di quantità negativa. Nell' equazione $x^4 = a^4 - b^4$, che eſigge due volte la eſtrazione della radice quadrata, cioè $xx = \pm\sqrt{a^4-b^4}$, ed indi $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a^4-b^4}}$, quattro ſono i valori, due reali poſitivo l'uno, e negativo l'altro, cioè $\pm\sqrt{+\sqrt{a^4-b^4}}$, ſuppoſta $b$ minore di $a$, gl'altri due immaginarj, cioè $x = \pm\sqrt{-\sqrt{a^4-b^4}}$, e quando $b$ ſia maggiore di $a$ tutti quattro ſaranno immaginarj; in proporzione ſi diſcorra dell' altre equazioni. I valori negativi, che diconſi ancora falſi, ſono niente meno reali de' poſitivi, e queſta ſola diverſità ânno, che ſe

ſe nella ſoluzione del problema i poſitivi ſi prendono dal punto fiſſo principio dell'incognita verſo una parte, i negativi ſi prendono dallo ſteſſo punto verſo la parte oppoſta. Sia (*Fig.* 10.) $A$ il principio dell'incognita $x$ di un problema, e l'equazione finale ſia, per eſempio $x = \pm a$; ſi prenda $AB = a$, fiſſato adunque, che da $A$ verſo $B$ ſieno i poſitivi, ſarà $AB = a$ il valore poſitivo di $x$, ed in conſeguenza, preſa $AC = AB$, ma dalla parte contraria del punto $A$; ſarà $AC = -a$ il valore negativo di $x$, ed il problema avrà due ſoluzioni, una nel punto $B$, l'altra nel punto $C$. Ma di tutto ciò ſi vedrà meglio la pratica ne' problemi, che ſcioglierò in appreſſo.

76. Qualora pertanto l'equazione, a cui le condizioni de' problemi ci ânno condotti, ci ſomminiſtra ſoli valori immaginarj, ciò vuol dire, che il problema non â ſoluzione alcuna, e che è impoſſibile. Lo ſteſſo ſi concluda quando la equazione finale ci porta all'aſſurdo, come ſe ci daſſe quantità finita eguale al zero, o il tutto eguale alla parte, o coſe ſimili. Tale la ritroverebbe, chi nella retta $AB = a$ (*Fig.* 1.) ricercaſſe il punto $C$, onde foſſe il quadrato di tutta eguale alla ſomma de' quadrati delle parti; imperciocchè fatta $AC = x$, ſarebbe $aa = xx + aa - 2ax + xx$, cioè $2xx - 2ax = 0$, e però $x = a$, vale a dire la parte eguale al tutto. Aſſurda pure l'avrebbe chi, alzata ſulla retta $AB$ (*Fig.* 11.) la perpendicolare indefinita $BH$, cercaſſe in eſſa un punto $C$, da cui conducendo al dato punto $A$ la retta $CA$, foſſero parallele le due $CB$,

M $CA$;

$CA$; imperciocchè fatta $BA = a$, $BC = x$, e presa $BD = \frac{1}{2}x$, e condotta $DM$ parallela a $BA$, sarebbe, per i triangoli $CBA$, $CDM$ simili, $DM = \frac{1}{2}a$; ma se $CA$, $CB$ sono parallele, deve essere $DM$ eguale a $BA$, e però $\frac{a}{2} = a$, equazione impossibile.

Se taluno però pretendesse, che la prima delle due superiori equazioni, cioè $2xx - 2ax = 0$ non sia altrimenti assurda, ma che ci somministri due valori benchè inutili, però reali, fondato sulla ragione, che dividendo l'equazione per $2x - 2a$, risulta $x = 0$ valore reale, che scioglie il problema; imperocchè presa $x = 0$, cioè divisa la linea $AB$ nel punto $A$, una parte di essa sarà zero, e l'altra sarà $a$; e però il quadrato di tutta eguale al quadrato delle parti, cioè $aa = 0 + aa$, o sia $aa = aa$; e dividendo per $2x$ l'equazione, risulta $x = a$ valore reale, che scioglie il problema, dividendo la linea nel punto $B$; a chi, come dissi, così pretendesse non mi opporrei per avventura; ma qualunque siasi la giusta idea di questa, e simili equazioni, egli è certo però, che nulla di più ci fa sapere, se non che il quadrato della linea $AB$ è eguale al quadrato della linea $AB$, e la linea eguale a se stessa.

Ho preso per esempio d'equazione, che porta all' assurdo, quella che mi dà una quantità finita eguale a zero, o il tutto eguale alla parte; ciò però s'intenda quando la incognita non possa esser grandezza infinita, ed il problema non sia più, che determinato, perchè in questi casi pos-

possono esser verissime tali equazioni, come si vedrà altrove.

77. S'incontrano pure alle volte altre equazioni, le quali dall'una, e dall'altra parte del segno d'egualità contengono le stesse quantità, e che per conseguenza ridotte vengono alla fine a concludere $0=0$. Queste tali equazioni, che si chiamano identiche, ci fanno sapere più di quello, che nella proposizione da noi si ricercava, mentre che sparendo da esse affatto l'incognita, e portandoci a conclusione vera (perchè è sempre vero, che il zero è eguale al zero) ci fanno conoscere, che il valore dell'incognita è quello, che si vuole, e che però la proposizione non è un problema, ma un teorema. Eccone un'esempio. Nel dato rettangolo $ACDE$ (*Fig.* 12.) condotta la parallela $BF$ ad $AE$ dal dato punto $B$, si dimanda in essa un punto tale $H$, che tirate agli opposti angoli le rette $HA$, $HC$, $HD$, $HE$, sia la somma de' quadrati di $HA$, $HD$ eguale alla somma de' quadrati di $HE$, $HC$. Sia $AB=a$, $BC=b$, $CD=e$, e supposto, che $H$ sia il punto cercato, sarà $BH=x$, e però $HF=e-x$. Il quadrato adunque di $HA$ sarà $=aa+xx$, di $HC$ sarà $=bb+xx$, di $HD$ sarà $=bb+ee-2ex+xx$, di $HE$ sarà $=aa+ee-2ex+xx$, e però l'equazione $aa+xx+bb+ee-2ex+xx=bb+xx+aa+ee-2ex+xx$, cioè $0=0$, vale a dire, che dovunque si prenda nella retta $BF$ il punto $H$, si verificherà sempre la ricercata proprietà.

78. Le equazioni, che ridotte contengono la inco-

 gnita

gnita ad una ſola dimenſione, diconſi equazioni ſemplici, e del primo grado; quelle, che la contengono elevata al quadrato, ſieno eſſe quadratiche ſemplici o affette, ſi dicono del ſecondo grado; quelle, che la contengono elevata al cubo, comunque ſiaſi degli altri termini, ſi dicono del terzo grado, e così del quarto, del quinto ec. le altre in proporzione. Quindi i problemi, che da equazioni ſemplici, o del ſecondo grado vengono eſpreſſi, ſi dicono problemi piani, perchè ſi coſtruiſcono colla ſola geometrìa comune dell'Euclide, cioè *circino & regula*; gli altri tutti ſi dicono ſolidi, perchè per la coſtruzione loro, ſi richiede la deſcrizione di certe curve, che luoghi ſolidi pure ſi chiamano. Della riſoluzione, e coſtruzione de' problemi ſolidi nulla quì dirò, riſerbandomi a trattarne eſpreſſamente nel Capo IV.

79. Vi ſono molte equazioni, che ſembrano a prima viſta di quel grado, che dall'eſponente maſſimo dell'incognita viene indicato, ma che però, debitamente trattandole, s'abbaſſano a grado inferiore. Di queſto genere ſono tutte quelle, le quali oltre il primo termine, cioè quello della maſſima poteſtà dell'incognita, ed il termine affatto cognito, un'altro ſolo ne contengono, in cui la incognita abbia la poteſtà, che ſia la radice quadrata della poteſtà del primo termine; come ſarebbe $x^4 - 2aaxx = b^4$, la quale maneggiata colla regola delle quadratiche affette ſi riduce ad eſſere $xx = aa \pm \sqrt{a^4 + b^4}$, e però $x = \pm \sqrt{aa \pm \sqrt{a^4 + b^4}}$. Iſteſſamente $x^6 + a^3x^3 - b^6 = 0$, che

che ridotta nello ſteſſo modo ſi trova eſſere $x^3 = \frac{-a^3 \pm \sqrt{a^6 + 4b^6}}{2}$, e però $x = \sqrt[3]{\frac{-a^3 \pm \sqrt{a^6 + 4b^6}}{2}}$, ed infinite altre di ſimil natura. Sono pure dello ſteſſo genere quelle, che per mezzo dell'eſtrazione delle radici poſſono abbaſſarſi a grado inferiore; così $x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2bbxx + 2abbx + b^4 = aabb + b^4$, eſſendo il primo membro dell'equazione un quadrato, la di cui radice è $xx - ax - bb$, ſarà l'equazione abbaſſata $xx - ax - bb = \pm b\sqrt{aa + bb}$. Così nell'equazione $x^3 + 3axx + 3aax = b^3$ ſe ſi aggiunga $a^3$ all'uno, ed all'altro membro, ſarà $x^3 + 3axx + 3aax + a^3 = a^3 + b^3$, ma il primo membro è un cubo, la di cui radice è $x + a$, adunque l'equazione abbaſſata ſarà $x + a = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Ma non è ſempre così facile il riconoſcere, quale quantità debba aggiungerſi, o ſottrarſi dal primo membro dell'equazione, acciocchè egli divenga una poteſtà perfetta, nè ſi può aſſegnarne metodo alcuno, onde in queſti caſi potrà ſolo aver uſo la pratica, e l'induſtria dell' Analiſta.

80. Ma ſe il propoſto problema foſſe di tale natura, che o difficilmente, o in neſſun modo una ſola incognita aſſunta baſtaſſe per avere tutte quelle denominazioni, che all'invenzione della equazione ſono neceſſarie, in queſto caſo ſi prende una, due, tre, e quante abbiſognano incognite di più, mentre che eſſendo il problema determinato di natura ſua, ci ſomminiſtrerà ſempre materia di al-

altrettante equazioni, quante ſono le incognite aſſunte; col mezzo di ciaſcuna di queſte equazioni ſi elimina una delle incognite, cioè ſe ne trova il valore dato per le rimanenti, e per le cognite, fino a che ſi giunga finalmente all'ultima equazione, la quale conterrà un' incognita ſola. Cogli eſempj s'intenderà meglio il modo di queſte operazioni.

Sieno in primo luogo due equazioni ſemplici, cioè del primo grado, per eſempio, $a + x = b + y$, e $2x + y = 3b$, e ſi voglia eliminare la $y$ ritenendo la $x$; per mezzo di quella, che ſi vuole, delle due equazioni, per eſempio della prima, ſi trovi il valore della $y$ colla debita traſpoſizione de' termini, e ſarà $y = a + x - b$; queſto valore ſi ſoſtituiſca nella ſeconda in luogo della $y$, e ſi avrà la nuova equazione $2x + a + x - b = 3b$, cioè $x = \frac{4b - a}{3}$, e ſoſtituito queſto valore in una delle due equazioni propoſte in luogo della $x$, ſi avrà il valore della $y = \frac{2a + b}{3}$. Ciò potevaſi anche ottenere col ricavare da ambe le equazioni i due valori della $y$, ed aſſieme paragonali, imperciocchè dalla prima equazione ſi ricava $y = a + x - b$, dalla ſeconda $y = 3b - 2x$, e però ſarà $a + x - b = 3b - 2x$, cioè $x = \frac{4b - a}{3}$, come prima.

81. Nello ſteſſo modo ſi opererà quando le equazioni contengano la incognita, che ſi vuol'eliminare, elevata alla ſeconda dimenſione, mentre per mezzo di una delle

delle due date equazioni, o con la sola trasposizione de' termini, o colle regole delle quadratiche semplici, o affette, se ne potrà sempre avere il valore da sostituirsi nell' altra equazione. Sieno le due equazioni $xx + 5ax = 3yy$, e $2xy - 3xx = 4aa$, e si voglia eliminare la $y$, la seconda darà $y = \frac{4aa + 3xx}{2x}$, e però $yy = \frac{16a^4 + 24aaxx + 9x^4}{4xx}$, e sostituito questo valore nella prima, sarà essa $xx + 5ax = \frac{48a^4 + 72aaxx + 27x^4}{4xx}$, cioè $23x^4 - 20ax^3 + 72aaxx + 48a^4 = 0$. Che se si voglia eliminare la $x$, ritrovato il di lei valore per quella, che si vuole, delle due equazioni, per esempio per la seconda, cioè $x = \frac{y}{3} \pm \frac{\sqrt{yy - 12aa}}{3}$, e sostituito nella prima, sarà essa $\frac{2yy - 12aa \pm 2y\sqrt{yy - 12aa}}{9} + \frac{5ay \pm 5a\sqrt{yy - 12aa}}{3} = 3yy$, e liberando dai radicali, ed ordinando l'equazione, sarà dopo un lungo calcolo $621y^4 - 810ay^3 + 648aayy + 360a^3y + 2844a^4 = 0$, e dividendo per $9$ sarà finalmente $69y^4 - 90ay^3 + 72aayy + 40a^3y + 316a^4 = 0$.

82. Generalmente per le equazioni, nelle quali l'incognita, che si vuole eliminare, sia a qualunque grado elevata in ambe le equazioni; si trovi per mezzo di ciascuna di esse il valore della massima potestà della stessa incognita, cioè posta essa massima potestà sola da una parte

del

del segno d'egualità, si pongano dall'altra parte tutti gli altri termini, e questi due valori tra loro paragonati ci daranno un'equazione di grado inferiore; si ripeta la stessa operazione fino a tanto, che si abbia un'equazione affatto semplice rispetto ad essa incognita, ed in conseguenza il suo valore espresso per l'altra incognita, e per le cognite, il qual valore si sostituisca in una delle date equazioni in luogo dell'incognita, e sue potestà, e si avrà un'equazione espressa con l'altra sola incognita, e con le cognite.

Sieno le due equazioni $y^3 + aay = bxx$, e $y^3 - bxx = aax$, e si voglia eliminare la $y$; sarà dunque per la prima $y^3 = bxx - aay$, per la seconda $y^3 = aax + bxx$, e però $bxx - aay = aax + bxx$, cioè $-x = y$, e fatte le debite sostituzioni in quella, che si vuole, delle due equazioni, si avrà $-x^3 - aax = bxx$. Sieno le due equazioni del numero antecedente $xx + 5ax = 3yy$, $2xy - 3xx = 4aa$, e si voglia eliminare la $x$. Sarà adunque, per la prima, $xx = 3yy - 5ax$, per la seconda, $xx = \frac{2xy - 4aa}{3}$, e però sarà l'equazione $3yy - 5ax = \frac{2xy - 4aa}{3}$, da cui averassi $x = \frac{9yy + 4aa}{2y + 15a}$, e questo valore sostituito in una delle due proposte equazioni, per esempio nella prima, sarà

$$\frac{81y^4 + 72aayy + 16a^4}{4yy + 60ay + 225aa} + \frac{45ayy + 20a^3}{2y + 15a} = 3yy;$$

e finalmente riducendo al comune denominatore, sarà $69y^4 - 90ay^3 + 72aayy + 40a^3y + 316a^4 = 0$, come sopra.

Ma

Ma ſe le due equazioni non aveſſero il maſſimo termine dell'incognita, che ſi vuole eliminare, alla ſteſſa poteſtà, ſi moltiplichi l'equazione di grado inferiore per tale poteſtà di eſſa incognita, onde ſia dello ſteſſo grado dell'altra, indi ſi proceda nel detto modo. Così ſe ſia $y^3 = xyy + 3aax$, ed $yy = xx - xy - 3aa$, e debbaſi togliere la $y$; ſi moltiplichi la ſeconda equazione in $y$, onde ſia $y^3 = xxy - xyy - 3aay$, e però $xyy + 3aax = xxy - xyy - 3aay$. Da queſta ſi cavi il valore di $yy$, cioè $yy = \frac{xxy - 3aay - 3aax}{2x}$, il quale paragonato col valore di $yy$ dato dalla ſeconda equazione propoſta $yy = xx - xy - 3aa$, darà $\frac{xxy - 3aay - 3aax}{2x} = xx - xy - 3aa$, cioè $3xxy - 3aay + 3aax = 2x^3$, e però $y = \frac{2x^3 - 3aax}{3xx - 3aa}$, e ſoſtituito queſto valore in una delle due propoſte equazioni, come nella ſeconda, ſarà $\frac{4x^6 - 12aax^4 + 9a^4xx}{9x^4 - 18aaxx + 9a^4} = xx - \frac{2x^4 + 3aaxx}{3xx - 3aa} - 3aa$; cioè riducendo allo ſteſſo denominatore,
$x^6 + 18aax^4 - 45a^4xx + 27a^6 = 0$.

Ne' caſi particolari poſſono eſſervi de' ripieghi, e delle più ſpedite maniere per ottenere l'intento, ma non cadono ſotto regola alcuna. Si potrà vederne un'eſempio nelle due equazioni $x + y + \frac{yy}{x} = 20b$, ed $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 140bb$. Volendo eliminare la $x$; ſi traſporti il termine $y$

della prima dall'altra parte, onde sia $x + \frac{yy}{x} = 20b - y$, e quadrando ambi i membri, $xx + 2yy + \frac{y^4}{xx} = 400bb - 40by + yy$, cioè $xx + yy + \frac{y^4}{xx} = 400bb - 40by$; ma il primo membro di questa equazione è lo stesso del primo membro della seconda equazione proposta, sarà adunque $400bb - 40by = 140bb$, cioè $y = \frac{13b}{2}$.

83. Con calcolo bensì più laborioso, e lungo, ma nello stesso modo, se tre, quattro ec. sono le equazioni, ed altrettante le incognite, si riducono ad una sola, imperciocchè per mezzo di un' equazione si elimina un' incognita, il di cui valore dato per l'altre, e per le cognite si sostituisce in ciascuna delle equazioni rimanenti; indi per mezzo di un'altra equazione si elimina un' altra incognita, ed il di lei valore si sostituisce in quelle, che rimangono, e così di mano in mano sino al fine. Sieno le tre equazioni $x + y = c + z$; $z + x = a + y$; $z + y = b + x$, e si voglia un' equazione sola data per $z$. Dalla prima equazione si cavi il valore della $y$, cioè $y = c + z - x$, si sostituisca questo valore nell' altre due, e sono $z + x = a + c + z - x$, cioè $2x = a + c$ in luogo della seconda, e $z + c + z - x = b + x$, cioè $2z = b - c + 2x$ in luogo della terza; in quest' ultima si sostituisca in luogo della $x$ il valore, che si cava dalla seconda trasformata, cioè $x = \frac{a + c}{2}$,

e si

e si avrà finalmente $2z = b - c + a + c$, cioè $z = \frac{a+b}{2}$.

In quest' altra maniera pure si può operare. Da ciascuna delle tre equazioni date si cavi il valore, per esempio della $y$, vale a dire $y = c + z - x$, $y = z + x - a$, $y = b + x - z$; Dal paragone di due a due di questi valori, a piacere, si formino due equazioni, che non averanno la $y$; da una di queste equazioni si cavi il valore dell'altra incognita $x$, che si sostituisca nell'altra equazione, vale a dire si facciano le due equazioni $c + z - x = z + x - a$, e $c + z - x = b + x - z$; dalla prima, se così piace, si cavi il valore della $x$, cioè $x = \frac{a+c}{2}$, che si sostituisca nella seconda, e viene l'equazione $c + z - \frac{a+c}{2} = b + \frac{a+c}{2} - z$, cioè $z = \frac{a+b}{2}$, come sopra, data per la sola incognita $z$. Nello stesso modo si operi quando le equazioni sono più composte, ed in maggior numero. Nella soluzione de' problemi si vedrà l'uso delle regole insegnate.

84. Qualunque volta le condizioni, o sia i dati del problema non ci somministrino tante equazioni, quante sono le incognite assunte, onde due per necessità rimangano, il problema sarà sempre indeterminato, nè potrassi mai trovare il valore di una delle incognite, se non supposto, e determinato il valore dell' altra, nel qual caso ogni problema indeterminato si fa determinato. Per formare, quantunque anticipatamente, qualche idea di que-

sti problemi indeterminati, cerco due numeri, la somma de' quali sia eguale a 30. Chiamo il primo numero $x$, se chiamerò il secondo $= 30 - x$, per la condizione del problema, non avrò poi il modo di arrivare all' equazione; adunque chiamo il secondo $y$, sarà per la condizione del problema $x + y = 30$. E poichè non è possibile il ritrovare materia d'altra equazione, con cui eliminare una delle due incognite, il problema è di natura sua indeterminato, ma se assegnerò un valore determinato ad una delle incognite, e supporrò, per esempio $y = 8$, sarà $x = 30 - y = 22$. Ma perchè si possono assegnare successivamente infiniti valori alla $y$, così infiniti sono i valori della $x$, ed in conseguenza d'infinite soluzioni è capace il problema. Ne prendo un' altro esempio dalla Geometria. Si debba ritrovare un rettangolo eguale ad un dato quadrato; si chiami $y$ la base del rettangolo, l'altezza $x$, ed $aa$ il dato quadrato; adunque sarà l'equazione $aa = xy$, e non avendo materia d'altra equazione, rimane il problema indeterminato, come di fatto infiniti sono i rettangoli al dato quadrato eguali, potendosi in infiniti modi variare la base, e relativamente l'altezza di quelli. Ma se si aggiungerà la condizione, che la base del rettangolo debba essere, per esempio, eguale ad $\frac{x}{2}$, sarà $y = \frac{x}{2}$, e l'equazione $\frac{xx}{2} = aa$, e così potendosi in infiniti modi variare una delle due incognite, in infiniti si varierà l'altra, ed infinite saranno le soluzioni del problema.

85.

85. All' oppoſto : Se le condizioni del problema, che devonſi adempire, daranno più equazioni , che incognite, il problema ſarà più che determinato, e per lo più impoſſibile ; e ſe avrà ad eſſer poſſibile , converrà , che i valori delle date ſi riſtringano a certa legge , la quale talvolta ci può far vedere innumerabili caſi , ne' quali è poſſibile il problema . Nel ſopra notato eſempio di ritrovare due numeri, la ſomma de' quali ſia eguale a 30 , che quando nulla di più ſi eſigga, è problema indeterminato; ſe ſi aggiunga la condizione , che in oltre la differenza de' quadrati di eſſi numeri ſia data , per eſempio , eguale a 60 , il problema è determinato, avendo noi in queſto caſo due equazioni, cioè $x+y=30$ , e $xx-yy=60$ , e cavando dalla prima il valore della $y$ , e ſoſtituendone il quadrato nella ſeconda , ſarà $x=\frac{960}{60}$, cioè $x=16$, ed in conſeguenza $y=14$. Ma ſe di più ſi aggiungeſſe la terza condizione , che la ſomma de' quadrati di eſſi numeri ſia eguale ad un dato numero , il problema è più che determinato , e però poſſibile nel ſolo caſo , in cui il numero dato , a cui ſi vuole eguale la ſomma de' quadrati, ſia appunto la ſomma di eſſi quadrati , cioè il 452 . Così nell' altro eſempio del rettangolo eguale al dato quadrato ; ſe ſi vorrà , che il rettangolo ſia ſopra una data baſe , il problema ſarà determinato , ma più che determinato ſe ſi pretenda in oltre , che i lati abbiano una data ragione tra loro , e poſſibile nel ſolo caſo , che queſta ragione ſia ap-

punto quella, che nasce dall' altre condizioni della base data, e dell'eguaglianza al dato quadrato.

86. Risolute le equazioni, e ritrovati i valori dell' incognita ne' problemi geometrici, rimane che si costruiscano questi valori, cioè dalle date linee del problema si trovi quella, che appunto sia la incognita quantità, che si cercava. Sia in primo luogo il valore dell' incognita una frazione incomplessa razionale, come sarebbe $x = \frac{ab}{c}$, se si farà l'analogia $c, b :: a$, al quarto, sarà esso $\frac{ab}{c}$, adunque sulla indefinita $AC$ (*Fig.* 13.) presa $AB = c$, ed alzata in qualunque angolo $BD = b$, e condotta per i punti $A, D$ la indefinita $AE$, se si farà $AC = a$, e si condurrà $CE$ parallela a $BD$, sarà $CE = \frac{ab}{c} = x$. O pure condotte in qualunque angolo $EAC$ le indefinite $AE$, $AC$, se si prenda $AB = c$, $AD = b$, $AC = a$, e condotta dal punto $B$ al punto $D$ la retta $BD$, dal punto $C$ si tiri $CE$ parallela a $BD$, sarà $AE = \frac{ab}{c}$. Con questi adunque, o altri teoremi di geometria si trovi la quarta proporzionale delle tre quantità date, o la terza, se sono due, ed averassi in linea il valore dell' incognita. Se sia $x = \frac{abc}{mn}$, si instituisca una prima analogia, prendendo una qualunque lettera del denominatore, e due del numeratore, per esempio $m, b :: a$, al quarto, che è $\frac{ab}{m}$, si ritrovi la linea, che sia $= \frac{ab}{m}$, e si

chia-

chiami $f$, adunque sarà $x = \frac{fc}{n}$; si instituisca la seconda analogia $n, f :: c$, al quarto, e sarà esso $\frac{fc}{n}$, cioè $\frac{abc}{mn}$. Adunque presa ( *Fig.* 13.) $AB = m$, $AC = a$, $BD = b$, sarà $CE = \frac{ab}{m} = f$; indi prodotta indefinitamente $CE$, si prenda $CH = n$, $CK = c$, e condotta $HE$, si tiri dal punto $K$ la retta $KI$ parallela ad $HE$, sarà $CH, CE :: CK, CI$, cioè $n, \frac{ab}{m} :: c, \frac{abc}{mn} = CI = x$.

Se le dimensioni del numeratore, e denominatore saranno maggiori, in maggior numero cresceranno le analogie da instituirsi, ma sempre con lo stesso ordine.

87. Quindi se il valore dell'incognita sarà composto di più frazioni incomplesse, o di interi, e frazioni, ritrovate le linee, che a ciascun termine sono eguali, e sommate esse, o sottratte, secondo i segni, daranno la linea espressa dal valore dell' incognita.

88. Da questa regola si ricava il modo di trasformare un piano in un' altro di un dato lato, un solido in un' altro di uno, o di due lati dati ec. cioè un qualunque termine di due, tre ec. dimensioni in un' altro, il quale contenga una data lettera, se è di due dimensioni; una o due date, se è di tre dimensioni; ne contenga una, due, o tre date, se è di quattro ec.; imperciocchè sia il termine $bb$, che si voglia trasformare in un' altro, che contenga la let-

tera

tera $a$, per essa lettera $a$ si divida il termine $bb$, sarà $\frac{bb}{a}$; con la data regola si trovi nella (*Fig.* 13.) una linea eguale a $\frac{bb}{a}$, e si chiami $m$; adunque sarà $\frac{bb}{a}=m$, e però $bb=am$. Sia $ffc$ da trasformarsi in modo, che contenga $ab$; si trovi la linea eguale ad $\frac{ffc}{ab}$, che si chiami $n$, adunque sarà $\frac{ffc}{ab}=n$, e però $ffc=abn$; se si avesse voluto, che contenesse solamente la lettera $a$, si avrebbe fatto $\frac{fc}{a}=n$, e però $ffc=afn$. La cosa è chiara, nè occorre darne altri esempj.

89. Ciò posto; sia in secondo luogo il valore dell'incognita una frazione, o più frazioni complesse, cioè sia il denominatore di più termini, come $x=\frac{a^3}{bb+cc}$, si trasformi il termine, per esempio, $cc$ in un' altro, che contenga la lettera $b$, e sia $bm$; adunque avrassi $\frac{a^3}{bb+bm}$, quindi si risolva in due analogie, cioè $b$, $a$ :: $a$, al quarto $\frac{aa}{b}$; $b+m$, $\frac{aa}{b}$ :: $a$, al quarto $\frac{a^3}{bb+bm}$, e fatte al solito le costruzioni per mezzo de' triangoli simili, si avrà la linea, che è il valore dell'incognita. S'avrebbe potuto egualmente lasciare il termine $cc$ nel denominatore, e trasformare $bb$ in un'altro, che avesse contenuta la lettera $c$, per esempio $cn$; e sarebbe stata la frazione $\frac{a^3}{cc+cn}$,

che

che si risolve nelle due analogie $c, a :: a, \frac{aa}{c}$, e $c+n, \frac{aa}{c} :: a, \frac{a^3}{cc+cn}$. Sia $x = \frac{b^3 c}{a^3+b^3}$; si trasformi nel denominatore il termine $b^3$ in $aan$, e sarà $\frac{b^3 c}{a^3+aan}$, che si risolve in tre analogie $a, b :: b, \frac{bb}{a}$; $a, b :: \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{aa}$; $a+n, c :: \frac{b^3}{aa}, \frac{b^3 c}{aan+a^3}$. Se il denominatore fosse di tre termini, se ne dovrebbero trasformare due; se di quattro, se ne trasformerebbero tre ec., così se fosse stato $x = \frac{b^3 c}{a^3+b^3-bcc}$, si avrebbe fatto $b^3 = aan$, e $bcc = anp$, e però sarebbe $x = \frac{b^3 c}{a^3+aan-aap}$, che istessamente si risolverà in tre analogie; cioè $a, b :: b, \frac{bb}{a}$; $a, b :: \frac{bb}{a}, \frac{b^3}{aa}$; $a+n-p, c :: \frac{b^3}{aa}, \frac{b^3 c}{a^3+aan-aap}$.

Non può fare difficoltà alcuna, che il numeratore della frazione sia complesso, cioè di più termini, poichè la frazione equivale ad altrettante, quanti sono i termini del numeratore, di modo che $\frac{aa \pm bb}{a^3-c^3}$ è lo stesso, che $\frac{aa}{a^3-c^3} \pm \frac{bb}{a^3-c^3}$, e però risolvendo nel modo spiegato ciascu-

na di queſte, la ſomma, o differenza (ſecondo i ſegni) delle linee da eſſe eſpreſſe ci darà la linea, che è il valore dell' incognita.

90. Ma ſenza moltiplicare le operazioni col ridurre la frazione di numeratore compleſſo a più frazioni, baſterà uſare opportunamente della traſformazione de' termini nel numeratore, e nel denominatore in quella guiſa, che ſi è veduto doverſi fare fin' ora nel denominatore; e però ſia $x = \frac{aa+bc}{a+b}$, ſi traſformi il termine $bc$ nel termine $am$, e ſarà la frazione $\frac{aa+am}{a+b}$, quindi $a+b$, $a+m :: a$, $\frac{aa+am}{a+b}$. Sia $\frac{aacc-abcf}{acf+bff}$, ſi faccia $bf = am$, e la frazione ſarà $\frac{aacc-aacm}{acf+amf}$, cioè $\frac{acc-acm}{cf+mf}$, e però $f$, $a :: c$, $\frac{ac}{f}$, e $c+m$, $c-m :: \frac{ac}{f}$, $\frac{acc-acm}{fc+mf}$.

Se però il numeratore, e denominatore della frazione ſono tali, che ſenza traſformare termine alcuno ſi poſſano riſolvere ne' ſuoi componenti lineari, non ſi dovrà far uſo della traſformazione, che in queſti caſi moltiplicherebbe le operazioni inutilmente. Tali ſarebbero le frazioni $\frac{aab}{aa-cc}$, $\frac{a^3-abb}{ac+cc}$, e ſimili; la prima delle quali ſenz'altro ſi riſolve nelle due analogie $a+c$, $a :: a$, $\frac{aa}{a+c}$, ed $a-c$, $b :: \frac{aa}{a+c}$, $\frac{aab}{aa-cc}$; la ſeconda nelle due $c$, $a :: a+b$,

aa

$\frac{aa+ab}{c}$, ed $a+c$, $a-b$ :: $\frac{aa+ab}{c}$, $\frac{a^3-abb}{ac+cc}$. Anzi molte volte, senza trasformare i termini, tornerà assai più comodo servirsi dell'estrazione delle radici per risolvere nelle analogie la frazione; così la frazione $\frac{aa+bc}{a}$ si risolve nella analogia $a$, $\sqrt{aa+bc}$ :: $\sqrt{aa+bc}$, $\frac{aa+bc}{a}$; la frazione $\frac{a^3+abb}{aa+cc}$ si risolve nelle due analogie $\sqrt{aa+cc}$, $\sqrt{aa+bb}$ :: $\sqrt{aa+bb}$, $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa+cc}}$, e $\sqrt{aa+cc}$, $a$ :: $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa+cc}}$, $\frac{a^3+abb}{aa+cc}$. Talora però è necessario trasformare ancora qualche termine, come nella frazione $\frac{a^3+bbc}{aa-cc}$, la quale non potrà risolversi nè meno coi radicali, se non trasformando uno dei termini del numeratore, per esempio, $bbc$ in $acm$, onde sia $\frac{a^3+acm}{aa-cc}$, e però $a+c$, $a$ :: $\sqrt{aa+cm}$, $\frac{a\sqrt{aa+cm}}{a+c}$, ed $a-c$, $\sqrt{aa+cm}$ :: $\frac{a\sqrt{aa+cm}}{a+c}$, $\frac{a^3+acm}{aa-cc}$. Si dica lo stesso di frazioni più composte.

Tra le diverse assegnate maniere, quale poi debba eleggersi ne' casi particolari, non si può definire; si dovrà forse provarne più d'una, ed appigliarsi a quella, che ci fornisca una più semplice costruzione del proposto problema.

91. Per ciò che riguarda poi il ritrovare quelle linee,

 che

che vengono espresse dai radicali; sia in terzo luogo il valore dell'incognita un intiero radicale quadratico, per esempio $x = \sqrt{ab}$, cioè medio proporzionale fra la $a$, e la $b$; presa ( *Fig.* 14.) $AB = a$, ed in diretto $BC = b$, e divisa per metà in $H$ la composta $AC$, si descriva col raggio $HC$ il semicircolo $ADC$, e dal punto $B$ si alzi la perpendicolare $BD$ terminata alla periferia, sarà il rettangolo di $AB$ in $BC$ eguale al quadrato di $BD$; cioè $ab = \overline{BD}^2$, e però $\sqrt{ab} = BD = x$. Sia $x = \sqrt{2aa}$, presa $AB = 2a$, $BC = a$, sarà $BD = \sqrt{2aa}$ ec.

E se la radicale fosse di quantità complessa, come $x = \sqrt{4aa \pm ab}$, o pure $x = \sqrt{3aa \pm ab \pm 2ac}$; fatta $AB$ nel primo caso eguale a $4a \pm b$, cioè alla somma di $4a$, e di $b$, se il segno è positivo, ed alla differenza se è negativo; e nel secondo caso fatta $AB = 3a \pm b \pm 2c$, e presa $BC = a$, si descriva il semicircolo $ADC$ al diametro $AC$, ed alzata la perpendicolare $BD$, sarà essa perpendicolare nel primo caso eguale alla $\sqrt{4aa \pm ab} = x$, e nel secondo $= \sqrt{3aa \pm ab \pm 2ac} = x$.

Generalmente sieno quanti si vogliono i termini sotto il vincolo, ed in qualunque modo combinati coi segni, si costruirà sempre il valore per mezzo del semicircolo, quando ciascun termine sia moltiplicato nella stessa lettera, facendo l'uno de' segmenti, per esempio, $CB$ eguale a questa lettera, e l'altro segmento $BA$ eguale alla somma, o differenza di tutti i termini per essa lettera divisi, ed al-

zan-

zando la perpendicolare $BD$. E' facile il vedere, che se la combinazione de' segni rendesse quantità negativa il segmento $BA$, sarebbe negativa la quantità sotto il vincolo, e però immaginario il valore dell'incognita; tale sarebbe $x = \sqrt{ab - ac}$, supposta $c$ maggiore di $b$.

92. Che se ciascun termine non sarà per la stessa lettera moltiplicato, tali si possono essi rendere trasformando quelli, che non lo sono; e però se sia $x = \sqrt{aa \pm bb}$, facciasi $bb = am$, e sarà $x = \sqrt{aa \pm am}$, e presa $AB = a \pm m$, cioè $= a \pm \frac{bb}{a}$, e $BC = a$, e descritto il semicircolo, sarà $BD = \sqrt{aa \pm bb} = x$. Istessamente, data $x = \sqrt{aa + bb - cc}$, si faccia $bb = am$, e $cc = an$, e sarà $x = \sqrt{aa + am - an}$, e presa $AB = a + m - n$, e $BC = a$, sarà $BD = \sqrt{aa + bb - cc} = x$.

93. Ma comunque sieno i termini, senza fare mutazione alcuna, si costruiranno sempre i radicali quadratici, o col solo triangolo rettangolo, o con esso, e col circolo assieme. Sia $x = \sqrt{aa + bb}$, si prenda (*Fig.* 15.) $AB = a$, $BC = b$ perpendicolare ad $AB$, sarà $AC = \sqrt{aa + bb} = x$. Sia $x = \sqrt{2aa}$, fatta $AB = a$, e $BC = a$, sarà $AC = \sqrt{2aa}$; sia $x = \sqrt{3aa}$, fatte come prima le $AB$, $BC$ eguali ad $a$, ed alzata sulla retta $AC$ la normale $CD = a$, sarà $AD = \sqrt{3aa}$. Sia $x = \sqrt{5aa}$, fatta $AB = 2a$, $BC = a$, sarà $AC = \sqrt{5aa}$. Sia $x = \sqrt{aa + bb + cc}$, fatta $AB = a$, $BC = b$, e normale ad $AB$, sulla $AC$ si alzi la perpendicolare $CD = c$,

e farà l'ipotenusa $AD = \sqrt{aa+bb+cc} = x$, isteſſamente ſi proceda ſe la quantità foſſe più compoſta. Sia $x = \sqrt{aa+bc}$; quando non ſi trasformi il termine $bc$ nel modo detto di ſopra, preſa (*Fig.* 16.) $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$, ſul diametro $CD$ ſi deſcriva il ſemicircolo $CED$, la ordinata $BE$ ſarà $= \sqrt{bc}$, e tirando la ipotenuſa $AE$, ſarà eſſa eguale alla $\sqrt{aa+bc} = x$. Sia $x = \sqrt{aa+bc+ee}$, ſulla $AE$ ſi tiri la normale $EM = e$, e ſarà $AM = \sqrt{aa+bc+ee} = x$. Sia $x = \sqrt{aa+bc+cc}$, preſa $BC = b+c$, $BD = c$, ſarà $BE = \sqrt{bc+cc}$, ed $AE = \sqrt{aa+bc+cc}$. Se più ſaranno i termini, creſceranno le operazioni, ma non le difficoltà. Sia $x = \sqrt{aa-bb}$; al diametro $AB = a$ (*Fig.* 17.) ſi deſcriva il ſemicircolo $ACB$, a cui ſi inſcriva la corda $AC = b$, ſarà, per l'angolo retto $ACB$, $BC = \sqrt{aa-bb}$. Sia $x = \sqrt{aa-bb+hh}$, ſi produca $AC$ in $M$ in modo, che ſia $CM = h$, e condotta $BM$, ſarà eſſa $= \sqrt{aa-bb+hh} = x$. Sia $x = \sqrt{aa-bb-hh}$, nel ſemicircolo $ACB$ ſi inſcriva la corda $AC = \sqrt{bb+hh}$, ſarà $BC = \sqrt{aa-bb-hh}$. Sia $x = \sqrt{aa-bc}$, o pure $x = \sqrt{aa-bc-ce}$; preſa (*Fig.* 18.) $AB = b$ nel primo caſo, ed $= b+e$ nel ſecondo, e $AD$ in diretto $= c$, $AH = a$, ſi deſcrivano coi diametri $BD$, $AH$ i due ſemicircoli $BCD$, $AEH$, la ordinata $AC$ ſarà $= \sqrt{bc}$ nel primo caſo, ed $= \sqrt{bc+ce}$ nel ſecondo, e però

preſa

presa $AE = AC$, e condotta la corda $EH$, sarà essa $= \sqrt{aa - bc}$ nel primo caso, ed $= \sqrt{aa - bc - ce}$ nel secondo. Che se fosse $x = \sqrt{aa - bc - ee}$, fatta $AB = b$, $AD = c$, e presa in oltre $CF = e$ normale ad $AC$, sarà $AF = \sqrt{bc + ee}$, quindi fatta $AI = AF$, sarà $IH = \sqrt{aa - bc - ee}$.

Sia $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$, cioè $x = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}}$, si trasformi il secondo termine $b^4$ in $aamm$, e sarà $x = \sqrt{\sqrt{a^4 + aamm}}$, e levando dal secondo radicale il quadrato $aa$, sarà $x = \sqrt{a\sqrt{aa + mm}}$; si faccia ( *Fig.* 19. ) $AB = a$, $BC$ normale eguale ad $m$, sarà $AC = \sqrt{aa + mm}$. Prodotta $CA$ in $H$ di modo, che sia $AH = AB = a$, sul diametro $HC$ si descriva il semicircolo $HDC$, e condotta dal punto $A$ la perpendicolare $AD$ al diametro, sarà essa $AD = \sqrt{a\sqrt{aa + mm}} = x$.

I casi più composti si ridurranno senza fatica alli già spiegati. Nulla aggiungo intorno alle frazioni composte di quantità razionali, e di radicali, poichè niente altro esiggono, se non la combinazione delle date regole per quelle, e per queste.

94. Per la costruzione delle equazioni di quadratica affetta, che sono le più alte, che da me si trattino in questo Capo, ô supposta necessaria la risoluzione loro, ed ô assegnate le regole, affinchè si abbiano i valori dell'incognita da costruirsi nelle maniere poco fa insegnate. Non è però necessaria questa previa risoluzione, e senza di essa si possono costruire nel seguente modo. Tutte

Tutte le infinite equazioni di quadratica affetta vengono espresse dalla formola $xx \pm ax \pm bb = 0$, cioè dalle quattro, che nascono dalle quattro diverse combinazioni de' segni,

1. $xx + ax - bb = 0$
2. $xx - ax - bb = 0$
3. $xx + ax + bb = 0$
4. $xx - ax + bb = 0$

intendendo che la lettera $a$ esprima tutte le quantità, che formano il coefficiente del secondo termine, e $b$ la radice quadrata del complesso di tutti i termini cogniti. Adunque per costruire le due, prima, e seconda: si prenda (*Fig.* 20.) $CA = \frac{1}{2}a$, $AB$ in angolo retto, ed eguale a $b$, col raggio $CA$ si descriva il circolo $AED$, e dal punto $B$ si tiri la retta $BD$ terminata alla periferìa in $D$, la quale passi per lo centro $C$; sarà $BE$ il valore positivo dell'incognita, cioè la radice vera, o sia positiva dell'equazione $xx + ax - bb = 0$, e $BD$ sarà la falsa o negativa; siccome all'opposto sarà $BD$ la vera, e $BE$ la falsa dell'equazione $xx - ax - bb = 0$. Ed in fatti risolvendo le due equazioni, sono esse $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, ed $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e per la costruzione essendo $CA = CE = CD = \frac{a}{2}$, $AB = b$, sarà $CB = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, e però $BE = \sqrt{\frac{aa}{4} + bb} - \frac{a}{2}$, valore positivo della incognita nella prima equazione, e

$BD$ presa negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, valore negativo.

Così sarà $BD$ presa positiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, valore positivo dell'incognita nella seconda equazione, e per essere $CB$ maggiore di $CE$, sarà $EB$ negativa $= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$, valore negativo.

La terza, e quarta formola si costruirà così. Presa (*Fig.* 21.) $CA = \frac{1}{2}a$, ed $AB$ in angolo retto $= b$, come nelle costruzioni superiori, e descritto col raggio $CA$ il semicircolo $ADH$, si conduca $BD$ parallela ad $AC$, le due rette $BE$, $BD$ saranno i due valori, cioè le due radici negative dell'equazione $xx + ax + bb = 0$, e le due positive dell'equazione $xx - ax + bb = 0$. Imperciocchè, risolvendo le equazioni, ci darà la terza $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e la quarta $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$; ora condotte le rette $CD$, $CE$, e $CI$ perpendicolare a $BD$, sarà $ID = IE = \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e però $BE$ negativa $= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, valore negativo dell'incognita nella terza equazione, per esser $BI$ maggiore di $IE$; e sarà $BD$ presa negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, altro valore negativo della stessa terza equazione. All'opposto sarà $BD$ positiva

ſitiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e $BE$ poſitiva $= \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, ambi i valori poſitivi dell' incognita nella quarta equazione .

Adunque per coſtruire una qualunque equazione di quadratica affetta, baſterà aſſumere il raggio $CA$ eguale alla metà del coefficiente del ſecondo termine, e la tangente $AB$ eguale alla radice quadrata dell' ultimo termine, ed il rimanente, come nell' una, o nell' altra delle due figure, ſecondo che ſarà poſitivo, o negativo l'ultimo termine; quindi per coſtruire, per eſempio, l' equazione $xx + ax - bx - aa + cc = 0$, ſi faccia $AC = \frac{a-b}{2}$, ed $AB = \sqrt{aa - cc}$ nella prima delle due figure, ſe $a$ è maggiore di $c$; ed $AB = \sqrt{cc - aa}$ nella ſeconda, ſe $a$ è minore di $c$. Da queſto eſempio ſi vede, come debbaſi operare in tutti gl' altri .

Può darſi il caſo, che nella coſtruzione della *Fig.* 21. la retta $BD$ non tagli, ma tocchi il circolo $ADH$; o che nè lo tagli, nè lo tocchi; lo toccherà quando ſia $AC = AB$, cioè $\frac{1}{2}a = b$, ed i due valori dell' incognita dell' equazione $BE$, $BD$ ſaranno eguali, l' uno poſitivo, e l' altro negativo; non lo toccherà, nè lo taglierà quando ſia $BA$ maggiore di $AC$, cioè $b$ maggiore di $\frac{1}{2}a$, e l' incognita non avrà valori, cioè ſaranno immaginarj; e ciò confronta pure colla riſoluzione analitica, imperciocchè quando

do ſia $\frac{1}{2}a = b$, ſarà $\frac{aa}{4} - bb = 0$, e però i due valori $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$ ſaranno $x = -\frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$, e quando ſia $\frac{a}{2}$ minore di $b$, ſarà $\sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$ quantità immaginaria, e però immaginarj i due valori dell' incognita.

95. In queſte coſtruzioni è ſtato neceſſario ritrovare la radice quadrata dell' ultimo termine dell' equazione, la quale ci forniſce la tangente $AB$ del circolo. Se però eſſo ultimo termine ſia, o voglia renderſi (il chè è in noſtra mano) eguale ad un rettangolo, potranno coſtruirſi anche in queſt' altra maniera le quattro formole:

1. $xx + ax - bc = 0$
2. $xx - ax - bc = 0$
3. $xx + ax + bc = 0$
4. $xx - ax + bc = 0$

Si deſcriva il circolo $BAD$ (*Fig.* 22.) di un qualunque diametro, purchè eſſo non ſia minore nè di $a$, nè di $b - c$, (ſuppongo $b$ maggiore di $c$, cioè per $b$ intendo il lato maggiore, e per $c$ il lato minore del rettangolo dato) da un qualunque punto $A$ nella periferia ſi inſcrivano nel circolo le due corde $AB = a$, $AD = b - c$, e ſi produca queſta in $F$, onde ſia $DF = c$; col centro $C$ del primo circolo, e col raggio $CF$ ſi deſcriva il ſecondo $FGH$, che taglierà in $F$, $E$, $G$, $H$ le corde $AD$, $AB$ prolungate;

 ciò

ciò fatto, sarà $AG$ la radice vera, o sia positiva, cioè il valore positivo, ed $AH$ il negativo per l'equazione $xx + ax - bc = 0$; ed all'opposto $AG$ sarà il negativo, ed $AH$ il positivo per l'equazione $xx - ax - bc = 0$.

Per vedere questa verità bisogna supporre due proprietà del circolo, che da' Geometri si dimostrano, cioè che le rette $EA$, $DF$ sono eguali tra loro, siccome tra loro le due $GA$, $BH$, e che sono eguali i rettangoli $EA \times AF$, e $GA \times AH$. Supposti questi due Teoremi, si divida $BA$ per metà in $M$, per la sesta del secondo d'Euclide, sarà il quadrato di $MG$ eguale al quadrato di $MA$ con il rettangolo di $BG \times GA$, cioè di $HA \times AG$, cioè di $FA \times AE$; ma il quadrato di $MA$, per la costruzione, è $= \frac{aa}{4}$, ed il rettangolo di $FA \times AE$ è $= bc$, adunque sarà $MG = \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, e però $AG = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, valore positivo, ma $AH = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, quindi $AH$ negativa $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, altro valore che è negativo; l'uno e l'altro appunto, come nascono dalla risoluzione della prima equazione. Per la stessa ragione $AG$ negativa sarà $= \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, ed $AH$ positiva $= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bc}$, che sono i valori della incognita nella seconda equazione.

Ris-

Rispetto alla terza, e quarta equazione; descritto un circolo qualunque $RAD$, (*Fig.* 23.) col diametro non minore di $a$, nè di $b+c$, s'inscrivano in esso due corde da un qualunque punto $A$ della periferia, cioè $AR = a$, $AD = b+c$, e fatta $DF = c$, col centro $C$ del primo circolo, e col raggio $CF$ si descriva l'altro circolo $GHF$, che taglierà le due corde $AR$, $AD$ nei punti $G$, $H$, $F$, $E$; ciò fatto, saranno $AG$, $AH$ i due valori negativi della terza equazione, ed i due positivi della quarta; imperciocchè divisa $RA$ per metà in $M$, sarà, per la sesta del secondo libro d'Euclide, $\overline{MA}^2$ quadrato eguale al rettangolo di $HA \times AG$, cioè di $RG \times GA$, cioè di $DE \times EA$, con di più il quadrato di $MG$; adunque sarà $\frac{aa}{4} = bc + \overline{MG}^2$, cioè $MG = \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, e però $-MA + MG$, cioè $GA$ negativa sarà $= -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, e $-MG - MR$, cioè $GR$ negativa sarà $= -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$, ambi valori negativi dell' incognita nella terza equazione. Similmente $MG + MR$, cioè $\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$ sarà $GR$ positiva, ed $MA - MG$, cioè $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bc}$ sarà $AG$ positiva, ambi valori positivi dell' incognita nella quarta equazione.

E' chiaro, e per la costruzione della Figura vigesima

terza,

terza, e per la risoluzione della terza, e quarta equazione, che quando sia $bc = \frac{aa}{4}$, il circolo $HGEF$ toccherà la retta $RA$, e saranno eguali i due valori; e se $bc$ sarà maggiore di $\frac{aa}{4}$, nè la toccherà, nè la taglierà, e saranno i due valori immaginarj.

Vedute quanto può bastare le regole principali, passerò a farne uso nella soluzione de' Problemi, e però sia

## PROBLEMA I.

*96. Sia una certa somma di soldi da distribuirsi a certi poveri, ed il numero de' soldi sia tale, che per darne tre a ciascun povero ne manchino otto, e dandone due, ne avvanzino tre; si cerca il numero de' poveri, e de' soldi.*

Si chiami il numero de' poveri $= x$, adunque poichè il numero de' soldi è tale, che per darne tre a ciascheduno ne mancano otto, sarà il numero de' soldi $3x - 8$; ma dandone due, ne avvanzano tre, sarà adunque pure $= 2x + 3$, e però sarà l'equazione $3x - 8 = 2x + 3$, cioè $x = 11$. Pertanto undeci saranno i poveri, e perchè $3x - 8$, o pure $2x + 3$ è il numero de' soldi, sostituito l'undeci in luogo della $x$, sarà esso numero de' soldi $= 25$.

PRO-

## PROBLEMA II.

97. *Date le velocità di due mobili, la diſtanza loro, e la differenza del tempo, in cui principiano a moverſi ſopra una retta linea, ſi dimanda il punto nella linea, ed il tempo, in cui ſi raggiungeranno.*

Sia (*Fig.* 24.) in $A$ il primo mobile, la di cui velocità ſia tale, che deſcriva uno ſpazio $c$ nel tempo $f$; ſia $B$ il ſecondo mobile con una velocità tale, per cui deſcriva lo ſpazio $d$ nel tempo $g$, la differenza del tempo, in cui principiano a moverſi ſia $h$, e la diſtanza $AB$ ſia $e$. Si muovano eſſi in primo luogo verſo la ſteſſa parte, e ſi raggiungano in $D$, chiamata adunque $AD = x$, ſarà $BD = x - e$. Per avere l'equazione ſi conſideri, che eſſendo data la differenza del tempo dal principio del moto del mobile $A$, e del mobile $B$, ſe ritroveraſſi il tempo, che impiega il mobile $A$, ed il tempo, che impiega il mobile $B$, e che al tempo minore, cioè a quello del mobile, che per ſecondo ſi muove, ſi aggiunga la data differenza, dovranno indi queſti tempi eſſer eguali; e però con la regola delle proporzioni ſi dica: ſe il mobile $A$ fa lo ſpazio $c$ nel tempo $f$, in che tempo dovrà deſcrivere lo ſpazio $x$? cioè $c, f :: x$, al quarto, e ſarà eſſo $= \frac{fx}{c}$; ſimilmente: ſe il mobile $B$ deſcrive lo ſpazio $d$ nel tempo $g$, lo ſpazio $x - e$ in che tempo lo deſcriverà? cioè $d, g ::$

$x-e$, al quarto $\frac{gx-ge}{d}$, è adunque il tempo del mobile $A=\frac{fx}{c}$, ed il tempo del mobile $B=\frac{gx-ge}{d}$, e la loro differenza $h$, e però se il mobile $A$ principia a muoversi dopo il mobile $B$, sarà $\frac{fx}{c}+h=\frac{gx-ge}{d}$, e riducendo al comun denominatore, $fdx+chd=cgx-cge$, cioè $cgx-fdx=chd+ceg$, e dividendo per $cg-fd$, $x=\frac{chd+ceg}{cg-fd}$. Se il mobile $A$ si muova prima del mobile $B$, sarà $\frac{fx}{c}=h+\frac{gx-ge}{d}$, e riducendo al comune denominatore, $fdx=cdh+cgx-ceg$, cioè $cgx-fdx=ceg-cdh$, e dividendo per $cg-fd$, $x=\frac{ceg-cdh}{cg-fd}$. Sostituendo nell'espressione del tempo totale, $\frac{fx}{c}+h$ nel primo caso, ed $\frac{fx}{c}$ nel secondo, in luogo della $x$ il rispettivo valore ritrovato, averassi esso tempo, che si cerca.

Applicherò le formole a qualche esempio. Abbia il mobile $A$ la velocità di fare 9 miglia in un'ora, il mobile $B$ di farne 15 in due ore, e sieno lontani l'uno dall'altro 18 miglia, e $B$ cominci a muoversi un'ora prima di $A$; sarà adunque $h=1$, $f=1$, $c=9$, $g=2$, $d=15$, $e=18$, e però $x=\frac{324+135}{18-15}=153$. Sostituito questo valore in luogo di $x$, e gli altri nell'espressione $\frac{fx}{c}+h$ del tempo,

sarà

farà esso $= 18$. Adunque si raggiungeranno i due mobili in distanza dal punto $A$ di 153 miglia, dopo 18 ore dal principio del moto.

Abbia il mobile $A$ la velocità di fare quattro miglia in un'ora, il mobile $B$ di farne cinque pure in un'ora, e sieno lontani uno dall'altro 6 miglia, ed $A$ cominci a muoversi due ore prima di $B$, sarà dunque $b=2, f=1, c=4, g=1, d=5, e=6$. Presa la formola del secondo caso, sarà $x=\frac{24-40}{4-5}$, cioè $x=16$; e sostituito questo valore della $x$ cogli altri nella espressione del tempo $\frac{fx}{c}$, sarà esso $=4$. Adunque si raggiungeranno i due mobili $A$, $B$ in distanza dal punto $A$ di sedici miglia dopo quattro ore dal principio del moto.

Ma se i due mobili si vengano incontro; si uniscano, per esempio, nel punto $M$; adunque chiamata $AM=x$, e ritenute le denominazioni, come sopra, si varierà la sola $BM$, che sarà $=e-x$, ed in conseguenza il tempo del mobile $B$ per correre lo spazio $BM$, che sarà $\frac{ge-gx}{d}$. Quindi se $A$ principia il moto dopo del mobile $B$, sarà $\frac{fx}{c}+b=\frac{ge-gx}{d}$, e se comincia il moto prima, sarà $\frac{fx}{c}=b+\frac{ge-gx}{d}$, le quali equazioni sono, la prima $fdx+cdb=cge-cgx$, cioè $x=\frac{cge-cdb}{cg+fd}$, la seconda $fdx=cdb+cge-cgx$, cioè $x=\frac{cge+cdb}{fd+cg}$.

Abbia il mobile $A$ la velocità capace di fare ſette miglia in due ore, il mobile $B$ di farne otto in tre ore, e ſieno lontani l'uno dall'altro cinquanta nove miglia, ed $A$ ſi muova un'ora prima di $B$, ſarà adunque $h=1$, $f=2$, $c=7$, $g=3$, $d=8$, $e=59$, e però preſa la ſeconda formola $x=\frac{cge+cdh}{cg+fd}$, e ſoſtituiti i valori, ſarà $x=\frac{1239+56}{21+10}$, cioè $x=35$. S'incontreranno adunque i due mobili in diſtanza dal punto $A$ di 35 miglia dopo dieci ore dal principio del moto, come ſi vedrà ſoſtituendo nell'eſpreſſione del tempo totale, $\frac{fx}{c}$, il valore ritrovato della $x$, ed i valori di $f$, e di $c$.

## PROBLEMA III.

98. *Data la maſſa della Corona del Re Jerone miſta d'oro, e d'argento, e data la gravità ſpecifica dell'oro, dell'argento, e della Corona, ſi dimanda la quantità dell'uno, e dell'altro metallo.*

Sia la maſſa della corona $=m$, la gravità ſpecifica dell'oro a quella dell'argento, come 19 a $10\frac{1}{3}$; ed alla ſpecifica della corona, come 19 a 17. Si chiami $x$ la quantità dell'oro, ch'è nella corona, e però $m-x$ ſarà quella dell'argento. La maſſa diviſa per la denſità, o gravità ſpecifica s'eguaglia al volume di un Corpo, dunque il volume della corona ſarà $\frac{m}{17}$, quello dell'oro $\frac{x}{19}$, quello

dell'

dell'argento $\frac{m-x}{10\frac{1}{3}}$; ma il volume della corona è eguale ai due volumi dell'oro, e dell'argento, che la compongono; dunque si avrà l'equazione $\frac{m}{17} = \frac{x}{19} + \frac{m-x}{10\frac{1}{3}}$, cioè, ordinandola, $\frac{\overline{19-10\frac{1}{3}}\times x}{19\times 10\frac{1}{3}} = \frac{\overline{17-10\frac{1}{3}}\times m}{17\times 10\frac{1}{3}}$, e però $x = \frac{6\frac{2}{3}\times 19m}{8\frac{2}{3}\times 17}$, o sia $x = \frac{190m}{221}$. Quindi posta, per esempio, la massa della corona di cinque libbre, sarà la quantità dell'oro libbre $4\frac{66}{221}$, quella dell'argento libbre $\frac{115}{221}$.

## PROBLEMA IV.

*99. Se due pesi sieno tali, che levando dal primo una libbra, il resto sia eguale al secondo accresciuto di questa libbra; ed aggiunta una libbra al primo, e tolta dal secondo, sia la somma doppia del secondo diminuito di questa libbra, si ricercano i pesi.*

Si chiami il primo peso $= x$, il secondo $= y$, sarà adunque $x - 1 = y + 1$, per la prima condizione, e $\frac{x+1}{2} = y - 1$, per la seconda. Dalla prima si ricavi il valore $y = x - 2$, il quale sostituito nella seconda da-

rà $\frac{x+1}{2}=x-3$, e però $x+1=2x-6$, cioè $x=7$, ed in conseguenza $y=5$.

## PROBLEMA V.

100. *Nel dato circolo DCM (Fig. 25.) data la intercetta AB fra il centro, e la MB condotta dall' estremità del diametro DM perpendicolare ad AC, si cerca nella tangente MO il punto O, onde sia il rettangolo di OM in MB eguale al rettangolo di DM in AB.*

Si chiami $AB=b$, $AM=a$, $MO=x$, sarà $MB=\sqrt{aa-bb}$, e per la condizione del problema, $x\sqrt{aa-bb}=2ab$, cioè $x=\frac{2ab}{\sqrt{aa-bb}}$.

Dal punto $D$ si tiri $DO$ parallela a $BM$, saranno simili i triangoli $MBA$, $DMO$, e però $MB$, $BA$ :: $DM$, $MO$; cioè $\sqrt{aa-bb}$, $b$ :: $2a$, $MO=\frac{2ab}{\sqrt{aa-bb}}=x$.

## PROBLEMA VI.

101. *Dato un rettangolo, (Fig. 26.) si cerca un parallelo-grammo, i di cui lati sieno moltipli in data ragione dei lati del dato rettangolo, e l'area submultipla.*

Sia $ABCD$ il dato rettangolo, $AB=a$, $BC=b$, e però l'area $=ab$. Il parallelo-grammo, che si cerca, sia $BFHG$, il di cui lato $BF$ debba essere ad $AB$, come

me $n$ ad $e$, e però $BF = \frac{an}{e}$; il lato $BG$ debba essere a $BG$, come $m$ ad $e$, e però $BG = \frac{bm}{e}$; e finalmente l'area $BFHG$ debba essere al dato rettangolo $ab$, come $e$ ad $r$. Chiamisi $BL = x$, e però condotta $FL$ normale a $BG$, sarà $FL = \sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, adunque il parallelo-grammo $BFHG$, cioè $FL \times BG$ sarà $= \frac{bm}{e}\sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, il quale, poichè deve essere al rettangolo $ABCD$, come $e$ ad $r$, ci darà l'analogìa $\frac{bm}{e}\sqrt{\frac{aann}{ee} - xx}$, $ab :: e, r$; e l'equazione $\frac{bmr}{ee}\sqrt{\frac{aann}{ee} - xx} = ab$. Liberando dal radicale, sarà $\frac{aann}{ee} - xx = \frac{aae^4}{mmrr}$, cioè $xx = \frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}$, e cavando la radice, $x = \pm\sqrt{\frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}}$.

Nel lato $BA$ si prenda $BI = \frac{aee}{mr}$, ed $IM = \frac{an}{e}$, e col centro $I$, e raggio $IM$ si descriva il semicircolo $MLP$; sarà l'ordinata $BL = \sqrt{\frac{aann}{ee} - \frac{aae^4}{mmrr}} = x$, e dal punto $L$ alzando la perpendicolare $LF = BI$, e condotta $BF$, si prenda $BG = \frac{bm}{e}$, e compito il parallelo-grammo $BHFG$, sarà esso $= BG \times FL = \frac{abe}{r}$, cioè al rettangolo $BADC = ab$, co-

me

me $e$ ad $r$; ed il lato $BF$ sarà $= \sqrt{\overline{BL}^2 + \overline{LF}^2} = \frac{an}{e}$, le quali cose appunto si dovevano fare.

L' estrazione della radice â portata l'ambiguità de' segni, e però due valori dell' incognita, ed in conseguenza due soluzioni del problema; ma è facile il vedere, che questi due valori sono gli stessi, nè richiedesi altro per il valore negativo, se non che si faccia la stessa costruzione dalla parte di $B$ verso $C$.

## PROBLEMA VII.

102. *Inscrivere un Cubo in una data Sfera.*

Sia $KQEP$ (*Fig.* 27.) il circolo massimo della sfera, $A$ il centro, $AT$ il raggio $= a$, $AR$ la metà dell' altezza, o sia del lato del cubo inscritto, e però facciasi $AR = x$. Per lo punto $R$ s' intenda passare un piano normale ad $AT$, la di cui comune sezione colla sfera sarà il circolo $QNSKFO$, ed il quadrato in questo circolo inscritto sarà una faccia, o sia un piano del parallelepipedo inscritto alla sfera; ma perchè il parallelepipedo deve essere un cubo, converrà adunque, che sia $GR = SN = NO$, o sia $AR = RI = IO$, e che in oltre i piani, da' quali è chiuso, sieno tra loro in angolo retto. Nel circolo $KPEQ$ sarà l' ordinata $KR = RQ = \sqrt{aa - xx}$, e presa $RI = RA = x$, sarà $KI = \sqrt{aa - xx} + x$, ed $IQ = \sqrt{aa - xx} - x$, e nel circolo $NKOQ$ l'ordinata $IO = \sqrt{KI \times IQ} = \sqrt{aa - 2xx}$; adunque sarà l'equazione $\sqrt{aa - 2xx} = x$, e però $aa = 3xx$, ed $x = \pm\sqrt{\frac{aa}{3}}$. Presa $AV$ eguale alla terza parte del raggio $AB$, sul diame-

metro $CV$ si descriva il semicircolo $CRV$; il punto $R$, in cui egli taglia il raggio $AT$, sarà il punto ricercato, e sarà $AR = \sqrt{\frac{aa}{3}}$ metà del lato del cubo, dalla parte di $T$ preso il valore positivo, e dalla parte di $Z$ preso il negativo; quindi presa $AG = AR$, e per i punti $R$, $G$ tagliata la sfera con due piani normali ad $RG$, e presa $RH = RI = RA$, e per i punti $I$, $H$ tagliata la sfera con due altri piani normali ad $HI$, e con altri due per $SN$, $FO$ normali ad $NO$, sarà inscritto il cubo. Imperciocchè per la costruzione, come è chiaro, i piani sono tra loro normali, ed essendo $AR = RI = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, sarà, per la proprietà del circolo $KQEP$, l'ordinata $RQ = \sqrt{\frac{2aa}{3}}$, e però $IQ = \sqrt{\frac{2aa}{3}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, ed $IO = \sqrt{KI \times IQ} = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, ed in conseguenza tutti i lati eguali; il che ec.

Dalla costruzione di questo problema ne nasce una assai semplice dimostrazione sintetica. Poichè $AV$ è la terza parte del raggio $AC$, sarà il rettangolo $CAV$, cioè il quadrato di $AR$, la terza parte del quadrato del raggio, e perchè $AR = RI$, se dal centro $A$ della sfera si tirerà una retta $AI$ al punto $I$, sarà il quadrato di $AI$ doppio del quadrato di $AR$, cioè due terze parti del quadrato del raggio, e se dallo stesso centro $A$ intenderassi condotto un raggio $AO$, sarà il quadrato $IO$ eguale al quadrato $AO$ meno il quadrato $AI$, cioè eguale al quadrato del raggio

meno

meno due terze parti di esso quadrato, e però eguale ad una terza parte del quadrato del raggio, ed in conseguenza $IO$ eguale ad $AR$ ec.

## PROBLEMA VIII.

103. *Dati i due circoli concentrici $ACO$, $BDH$, (Fig. 28.) condurre dal punto O una corda tale, che sia $OM = DC$.*

Sia $OC$ la corda cercata, e sia $F$ il centro, $FH = a$, $FO = b$, ed abbassata la perpendicolare $ME$ ad $AO$, sia $FE = x$, adunque $EM = \sqrt{aa - xx}$, $EO = b - x$, e però $OM = \sqrt{aa - 2bx + bb}$. Dal punto $C$ si conduca $CA$ all' estremità del raggio $FA$; saranno simili i due triangoli $OEM$, $OCA$, e sarà $OM, OE :: OA, OC$, cioè $\sqrt{aa - 2bx + bb}$, $b - x :: 2b$, $OC = \frac{2bb - 2bx}{\sqrt{aa - 2bx + bb}}$, ma per la trentesima sesta del terzo d'Euclide è $DO \times OM = BO \times OH$, e però $DO, BO :: OH, OM$, cioè $DO = \frac{\overline{a + b} \times \overline{b - a}}{\sqrt{aa - 2bx + bb}}$, ed in conseguenza $CD = CO - DO = \frac{bb - 2bx + aa}{\sqrt{aa - 2bx + bb}} = \sqrt{bb - 2bx + aa}$, ma per la condizione del problema deve essere $OM = CD$, dunque sarà $\sqrt{bb - 2bx + aa} = \sqrt{bb - 2bx + aa}$, equazione identica, onde si ricava, che dovunque si tiri dal punto $O$ la corda $OC$, sarà sempre $OM = CD$; il che si conosce vero

vero anche conducendo dal centro $F$ la perpendicolare $FL$ ad una qualunque corda $OC$; imperciocchè essendo $F$ il centro dell'uno e dell'altro circolo, la retta $FL$ taglierà per metà tanto $DM$, quanto $CO$, e però se dalle eguali $LC$, $LO$ si leveranno le eguali $LD$, $LM$, rimangono eguali le $CD$, $MO$.

## PROBLEMA IX.

104. *Data la retta indefinita* NZ ( Fig. 29. ), *e dati in essa tre punti* N, A, K, *si ricerca il quarto* M *tale, che sia* NM *terza proporzionale di* NK, AM.

Poichè sono dati i tre punti $N$, $A$, $K$, sia $NA=a$, $NK=b$, e chiamata $AM=x$, sarà $NM=a+x$, adunque per la condizione del problema avremo $b, x :: x, a+x$, e ridotta l'analogia in equazione, $xx=ab+bx$, o sia $xx-bx=ab$, che è una quadratica affetta. Si aggiunga perciò all'uno, ed all'altro membro il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè $\frac{bb}{4}$, e sarà $xx-bx+\frac{bb}{4}=ab+\frac{bb}{4}$, ecavando la radice, $x-\frac{b}{2}=\pm\sqrt{ab+\frac{bb}{4}}$, o sia $x=\frac{b\pm\sqrt{4ab+bb}}{2}$.

Sulla retta $NZ$ indefinitamente prodotta d'ambe le parti si prendano le $AR$, $AQ$ eguali tra loro; ed eguali ciascuna ad $NK=b$, ed $RF$ quadrupla di $NA$, cioè $=4a$,

sarà $AF = 4a + b$; al diametro $FQ$ si descriva il semicircolo $FHQ$, sarà l'ordinata nel punto $A$, cioè $AH = \sqrt{4ab + bb}$, quindi aggiunta in diretto $AO = NK = b$, e divisa $OH$ per metà in $S$, sarà $OS = \frac{b + \sqrt{4ab + bb}}{2} = x$; adunque presa $AM = OS$, sarà $M$ il punto cercato, rispetto alla radice positiva. Ed in fatti, descritti i rettangoli $SN$, $AV$, $MO$, e condotte le diagonali $AI$, $AE$, poichè $OS = \frac{b + \sqrt{4ab + bb}}{2}$, sarà $AS = \frac{\sqrt{4ab + bb} - b}{2}$, ed il rettangolo di $OS \times SA$ sarà eguale ad $ab$, cioè eguale al rettangolo di $OA \times AN$; adunque i lati di questi rettangoli saranno in ragione reciproca, cioè sarà $OA$, $OS :: SA$, $AN$, vale a dire $EM$, $MA :: IN$, $NA$; adunque saranno in diretto le due $IA$, $AE$, ed in conseguenza simili i triangoli $IVE$, $AOE$, e però sarà $AO$, $OE :: IV$, $VE$; ma $AO = NK$, $OE = AM$, $IV = OS = AM$, $VE = NM$, dunque $NK$, $AM :: AM$, $NM$; il che ec.

La sopra posta costruzione riguarda il solo valore positivo dell'incognita, essendosi presa la radicale affetta dal segno positivo; in simil maniera però si costruisce anche il valore negativo. E però descritto l'altro semicircolo $FbQ$, e condotta l'ordinata $Ab$, sarà $Ob = b - \sqrt{4ab + bb}$, quantità negativa, e divisa $Ob$ per metà in $s$, sarà $Os = \frac{b - \sqrt{4ab + bb}}{2} = x$. Adunque la $x$ è quantità negativa,

e però, presa da $A$ verso $F$ la $Am = Os$, sarà $m$ l'altro punto, che scioglie il problema. Imperciocchè sarà $As = Ah - sh = \frac{-b - \sqrt{4ab + bb}}{2}$, e però $Os \times sA = ab = OA \times AN$, adunque fatto il rettangolo $Ns$, e condotta la diagonale $Ai$, poichè $As \times sO = OA \times AN$, ed $AN = si$, sarà $As, si :: AO, Os$, e però $Os = Oe$, ma $Os = Am$, dunque $Ve = Nm$; ma per i triangoli simili $AOe$, $iVe$ abbiamo $AO, Oe :: iV, Ve$, ed è $AO = NK$, $iV = Os = Oe = Am$, adunque sarà $NK, Am :: Am, mN$, il che ec.

Senza risolvere l'equazione $xx - bx - ab = 0$ del problema, si poteva da principio costruire per mezzo del numero 94. nella seguente maniera. Si prenda (*Fig.* 30.) $RO = NK = b$, ed in diretto $OD = NA = a$, e sul diametro $RD$ si descriva il semicircolo $RMD$, sarà l'ordinata $OM = \sqrt{ab}$; Col diametro $OR$ si descriva l'altro circolo $ARPO$, e dal punto $M$ condotta per lo centro $H$ la retta $MN$, e presa $AN = a$, $NK = b$, sarà $AM$ il valore positivo dell'incognita; e presa dalla parte di $A$ verso $N$ la porzione $Am = PM$, sarà $Am$ il valore negativo. Ommetto la costruzione della stessa equazione per mezzo del num. 95., perchè da sè è troppo chiara.

## PROBLEMA X.

105. *Dato il diametro AE del semicircolo AFE (Fig. 31.), e date le due porzioni CB, CD dal centro C, ed alzate le perpendicolari DF, BH; nella BH prodotta si dimanda il punto G tale, che condotta al punto F la retta GF, sia il rettangolo di $GF \times FD$ eguale al rettangolo di $AC \times BD$.*

Si conduca *FH* parallela ad *AE*, e si chiami il raggio $CA = r$, $CB = a$, $CD = b$, sarà $DF = \sqrt{rr - bb} = BH$, e sia $HG = x$. Poichè $HF = CB + CD = a + b$, sarà $GF = \sqrt{aa + 2ab + bb + xx}$, quindi per la condizione del problema averemo $\sqrt{aa + 2ab + bb + xx}\sqrt{rr - bb} = ar + br$, adunque levando l'asimmetrìa, sarà $aarr + 2abrr + bbrr = aarr + 2abrr + bbrr + rrxx - aabb - 2ab^3 - b^4 - bbxx$, e riducendo, $rrxx - bbxx - aabb - 2ab^3 - b^4 = 0$, cioè $xx = \frac{aabb + 2ab^3 + b^4}{rr - bb}$, e però estraendo la radice, $x = \pm \sqrt{\frac{aabb + 2ab^3 + b^4}{rr - bb}}$, cioè $x = \frac{ab + bb}{\sqrt{rr - bb}}$, ed $x = \frac{-ab - bb}{\sqrt{rr - bb}}$.
Deve adunque essere la $x$, che si cerca, eguale alla quarta proporzionale di *FD*, *DC*, ed *FH*; quindi poichè gli angoli in *D*, ed *H* sono retti, se si faranno gli angoli *GFH*, *gFH* eguali ciascuno all' angolo *CFD*, saranno simili i triangoli *GFH*, *gFH*, *CFD*, ed i punti *G*, *g* (cioè *G* rispetto al valore positivo, e *g* rispetto al negativo) soddisfaranno alla questione; imperciocchè sarà *FG*,

(*Fg*)

$(Fg)$ ad $FH :: FC, FD$, ma $FH = BD$, $FC = AC$, adunque farà $GF$ $(gF)$ a $BD :: AC, FD$, e però $GF$ $(gF)$ in $FD = BD \times AC$ ec.

E' facile il vedere, che rifpetto al valore pofitivo bafterà condurre $FG$ tangente nel punto $F$, poichè effendo retti gli angoli $GFC$, $HFD$, tolto il comune $HFC$, faranno eguali gli angoli $GFH$, $CFD$.

## PROBLEMA XI.

106. *Dalle eftremità della data* $AB$ ( *Fig.* 32. ) *condurre due rette* $AC$, $BC$ *in modo, che facciano l'angolo* $ACB$ *eguale al dato* $GDP$, *e che la fomma de' quadrati di* $AC$, *e di* $BC$ *fia al triangolo* $ABC$ *nella data ragione di* 4d *ad* a.

Si divida $AB$ per metà in $E$, e fi faccia $EH = x$; $HC = y$; adunque, poichè il problema è determinato, e fi fono prefe due incognite, converrà ritrovare due equazioni; fia $EA = a$, farà $AH = a - x$, $HB = a + x$, e però il quadrato di $AC$ farà $= aa - 2ax + xx + yy$, il quadrato di $CB$ farà $= aa + 2ax + xx + yy$, ed il triangolo $ACB = ay$; ma per la feconda condizione del problema la fomma di quefti quadrati deve effere al triangolo $ABC$ nella data ragione di $4d$ ad $a$; adunque averemo $2aa + 2xx + 2yy, ay :: 4d, a$, e però l'equazione $aa + xx + yy = 2dy$. Deve in oltre effere l'angolo $ACB$ eguale all'angolo dato $GDP$, e però prodotta $PD$, fe l'angolo $GDP$ è ottu-

ottuso, e presa $DG$ ad arbitrio, si tiri $GF$ normale a $PF$, sarà noto l'angolo $GDF$, essendo dato l'angolo $GDP$; e perchè di più è nota $DG$, che è stata presa ad arbitrio, saranno date le due, $DF$ che si ponga $=b$, e $GF$, che pongasi $=c$; adunque condotta dal punto $A$ normalmente a $BC$ prodotta la $AI$, dovranno essere simili i due triangoli $GDF$, $ACI$. Ora per la similitudine de' triangoli $BCH$, $BAI$, si avrà $AI = \frac{2ay}{\sqrt{aa + 2ax + xx + yy}}$, $BI = \frac{2aa + 2ax}{\sqrt{aa + 2ax + xx + yy}}$, e però $CI = \frac{aa - xx - yy}{\sqrt{aa + 2ax + xx + yy}}$; adunque dovendo essere $CI$, $AI :: DF$, $FG$, avremo $\frac{aa - xx - yy}{\sqrt{aa + 2ax + xx + yy}}$, $\frac{2ay}{\sqrt{aa + 2ax + xx + yy}} :: b$, $c$; e però la seconda equazione $2aby = aac - cxx - cyy$.

Per eliminare una delle due incognite, dalla prima, e dalla seconda delle due equazioni si cavi (per il num. 82.) il valore del quadrato $xx$, cioè dalla prima, $xx = 2dy - yy - aa$, dalla seconda, $xx = aa - yy - \frac{2aby}{c}$, e quinci l'equazione $2dy - yy - aa = aa - yy - \frac{2aby}{c}$, cioè $dy = aa - \frac{aby}{c}$, o sia (fatta $\frac{ab}{c} = f$) $y = \frac{aa}{d + f}$, valore della $y$ dato per le sole cognite, e sostituito questo valore in luogo della $y$ nell' equazione $xx = 2dy - yy - aa$, avrassi finalmente $xx = \frac{2aad}{d + f} - \frac{a^4}{\overline{d + f}^2} - aa$, cioè $xx = \frac{aadd - aaff - a^4}{\overline{d + f}^2}$,

e però $x = \pm \frac{a\sqrt{dd - ff - aa}}{d+f}$, valore dato per le sole quantità cognite.

Si conduca $AK$ indefinita, che faccia l'angolo $KAB$ eguale al dato $GDP$, e dal punto $E$ si abbassi la perpendicolare indefinita $EM$, e dal punto $A$ la retta $AL$ perpendicolare ad $AK$. Poichè fatta $DR$ perpendicolare a $PD$, l'angolo $RDG$ è eguale all'angolo $DGF$, sarà similmente l'angolo $LAE$ eguale allo stesso $DGF$, ed in oltre sono retti gl'angoli $E$, $F$; adunque saranno simili i triangoli $LAE$, $GDF$, e però $EL = \frac{ab}{c} = f$, $AL = \sqrt{aa + ff}$. In $EL$ prodotta si prenda $LM = d$, e col centro $L$, raggio $LM$ si descriva un circolo, che taglierà $AK$ in $K$; poichè l'angolo $KAL$ è retto, sarà l'ordinata $AK = \sqrt{dd - ff - aa}$, quindi fatta $EN = AK$, e condotta $MA$, e ad essa parallela la $NH$ dal punto $N$, sarà $ME, EA :: NE, EH$; cioè $d+f, a :: \sqrt{dd - ff - aa}$, $EH = \frac{a\sqrt{dd - ff - aa}}{d+f} = x$. Ciò fatto, col centro $L$, e col raggio $LA$ si descriva il circolo $OCQ$, e sul punto $H$ alzata la normale $CH$, si conducano $CA$, $CB$, il triangolo $ACB$ sarà il ricercato. Imperocchè, per la 32. del terzo libro d'Euclide, l'angolo $ACB$ è eguale all'angolo $KAE$, cioè, per la costruzione, eguale all'angolo $GDP$, e per la proprietà del circolo, $PC = \sqrt{OP \times PQ} = \frac{df + ff + aa}{d+f}$, e però $HC = \frac{aa}{d+f}$, e facendo il calcolo trove-

veremo, che la somma de' quadrati di $AC$, e $CB$ è appunto al triangolo $ACB$ nella data ragione di $4d$ ad $a$; il che ec.

Il segno ambiguo dell' equazione finale ci dà due valori eguali della $x$, uno positivo, e l'altro negativo; se adunque $EH$ preso verso $A$ si considera positivo, sarà $Eh$ preso verso $B$ ed eguale ad $EH$ il valore negativo, che ci somministrerà la stessa costruzione.

E' chiaro, che il problema sarà impossibile ogni qualvolta non sia $dd$ maggiore di $ff + aa$, cioè $LM$ maggiore di $LA$, perchè allora il radicale sarà immaginario.

## PROBLEMA XII.

107. *Dato* (*Fig.* 33.) *il semicircolo* BED, *e nel diametro prodotto dato un punto* A, *da esso condurre una secante* AE *tale, che la intercetta* GE *sia eguale al raggio* CB.

Sia $CB = c$, $AB = b$, $AD = a$, ed $AG = x$; sarà dunque, per la condizione del problema, $AE = c + x$; ma per la trentesima sesta del terzo d'Euclide il rettangolo $EAG$ è eguale al rettangolo $DAB$, e però avremo l'analogia $AE$, $AD$ :: $AB$, $AG$, cioè $c + x$, $a$ :: $b$, $x$, adunque sarà l'equazione $xx + cx = ab$, che è una quadratica affetta, ed al solito risoluta ci darà $x = \pm \sqrt{\frac{1}{4} cc + ab} - \frac{c}{2}$.

Sulla

Sulla retta $DA$ prodotta presa $AR = AB = b$, si descriva al diametro $RD$ il semicircolo $ROD$, e condotta l'ordinata $AO$, che sarà $= \sqrt{ab}$; normale ad $AO$ si tiri $OM = \frac{1}{2}c$, sarà $AM = \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$; quindi col centro $M$, col raggio $MO$ si descriva il semicircolo $QOP$, sarà $AQ = \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}$, valore positivo della $x$, ed $AP$ sarà $= \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} + \frac{c}{2}$, e però $AP$ presa negativa sarà il valore negativo. Adunque se col centro $A$, e col raggio $AQ$ si descriverà un' arco, taglierà esso il semicircolo $BED$ nel punto ricercato $G$; e se nella parte inferiore si descriverà sul diametro $RH = BD$ il semicircolo $RGH$, l'arco dal medesimo centro $A$ col raggio $AP$ descritto lo taglierà nel punto ricercato $G$, che spetta al valore negativo. Imperciocchè essendo $EA \times AG = DA \times AB$, cioè $EA \times \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2} = ab$, sarà $EA = \frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}}$, e però $EG = \frac{ab}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}} - \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} + \frac{c}{2}$, cioè, riducendo al comun denominatore, $EG = \frac{-\frac{cc}{2} + c\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}}{\sqrt{\frac{1}{4}cc + ab} - \frac{c}{2}}$,

e facendo attualmente la divisione, sarà finalmente $EG = c$, come deve essere.

Lo stesso calcolo procede rispetto alla costruzione del valore negativo, servendosi del rettangolo $HAR$ in luogo di $DAB$.

Anche sinteticamente si può dimostrare la soluzione del problema così.

Essendo $\overline{AO}^2 = RAD$, ed $EAG = DAB$, e per la costruzione, $AR = AB$, $AQ = AG$, $QP = BC$, $MO = MQ$, sarà $\overline{AO}^2 + \overline{OM}^2$, cioè $\overline{AM}^2 = EAG + \overline{QM}^2$, cioè, per la quarta del secondo d'Euclide, $\overline{AQ}^2 + 2AQM + \overline{QM}^2 = EAG + \overline{QM}^2$, e levato il comune $\overline{QM}^2$, sarà $\overline{AQ}^2 + 2AQM = EAG$, e per la terza dello stesso libro, $\overline{AQ}^2 + 2AQM = EGA + \overline{GA}^2$; ma $AQ = AG$, dunque sarà $2AQM = EGA$, cioè $AQ, AG :: EG, 2QM$, e però $EG = 2QM = BC$; il che ec.

## PROBLEMA XIII.

108. *Dati due archi di circolo, e le tangenti loro, ritrovare cosa sia la tangente della somma dei due dati archi.*

Sieno (*Fig.* 8.) i due archi dati $AH$, $HD$, e le tangenti $AI = a$, $HK = b$, il raggio $CA = r$, la tangente della somma de' due archi dati sia $AB = x$, sarà $CB = \sqrt{rr + xx}$, $CI = \sqrt{rr + aa}$, $CK = \sqrt{rr + bb}$, ed abbassata la $DE$ perpen-

pendicolare a $CA$, e $DF$ perpendicolare a $CH$, per la ſimilitudine de' triangoli $CBA$, $CDE$ ſarà $CE = \frac{rr}{\sqrt{rr + xx}}$, $ED = \frac{rx}{\sqrt{rr + xx}}$, e per la ſimilitudine de' triangoli $CKH$, $CDF$, ſarà $DF = \frac{br}{\sqrt{rr + bb}}$, e perchè ſimili pure ſono i triangoli $CAI$, $CEO$, $DFO$, averaſſi $EO = \frac{ar}{\sqrt{rr + xx}}$, $CO = \frac{r\sqrt{rr + aa}}{\sqrt{rr + xx}}$, $DO = \frac{b\sqrt{rr + aa}}{\sqrt{rr + bb}}$, e però averaſſi l'equazione $ED = EO + OD$, cioè $\frac{ar}{\sqrt{rr + xx}} + \frac{b\sqrt{rr + aa}}{\sqrt{rr + bb}} = \frac{rx}{\sqrt{rr + xx}}$, o ſia $\frac{rx - ar}{\sqrt{rr + xx}} = \frac{b\sqrt{rr + aa}}{\sqrt{rr + bb}}$, e quadrando, per liberarla dai radicali, ſarà $\frac{rrxx - 2arrx + aarr}{rr + xx} = \frac{bbrr + aabb}{rr + bb}$, e riducendo al comun denominatore, e togliendo i termini, che ſi eliđono, ſarà $r^4xx - 2ar^4x - 2abbrrx + aar^4 = aabbxx + bbr^4$, cioè $xx - \frac{2ar^4x - 2abbrrx}{r^4 - aabb} = \frac{bbr^4 - aar^4}{r^4 - aabb}$, quadratica affetta; adunque aggiunto all' uno, ed all'altro membro il quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine, cioè il quadrato

 di

di $-\frac{ar^4 - abbrr}{r^4 - aabb}$, sarà $xx - \frac{2ar^4 x - 2abbrrx}{r^4 - aabb} + \frac{aar^8 + 2aabbr^6 + aab^4 r^4}{\overline{r^4 - aabb}^2} = \frac{bbr^4 - aar^4}{r^4 - aabb} + \frac{aar^8 + 2aabbr^6 + aab^4 r^4}{\overline{r^4 - aabb}^2}$, e però cavando la radice, e riducendo al comune denominatore l'omogeneo di comparazione, $x - \frac{ar^4 - abbrr}{r^4 - aabb} = \pm\sqrt{\frac{bbr^8 + 2aabbr^6 + a^4bbr^4}{\overline{r^4 - aabb}^2}}$; ma la quantità sotto il vincolo è un quadrato, e la radice è $\frac{br^4 + aabrr}{r^4 - aabb}$, o pure $\frac{-br^4 - aabrr}{r^4 - aabb}$, adunque prendendo in primo luogo la radice positiva, sarà $x = \frac{ar^4 + abbrr + aabrr + br^4}{r^4 - aabb}$, e presa la negativa, sarà $x = \frac{ar^4 + abbrr - aabrr - br^4}{r^4 - aabb}$; ma nel primo caso tanto il numeratore, quanto il denominatore sono divisibili per $rr + ab$, ed il quoziente è $\frac{arr + brr}{rr - ab}$, e nel secondo caso tanto il numeratore, quanto il denominatore sono divisibili per $rr - ab$, ed il quoziente è $\frac{arr - brr}{rr + ab}$; adunque i due valori dell' incognita sono $x = \frac{rr \times \overline{a + b}}{rr - ab}$; $x = \frac{rr \times \overline{a - b}}{rr + ab}$, il primo de' quali servirà per

per la tangente della ſomma degl'archi dati, il ſecondo per la tangente della differenza (come appunto ſi trova ſciogliendo il problema in queſto caſo) il quale valore ſarà poſitivo, o negativo, ſecondo che l'arco, o ſia la tangente $a$ ſarà maggiore, o minore della tangente $b$.

Ciò poſto, non è difficile paſſare alla ſoluzione generale del problema, cioè dati quanti ſi vogliano archi con le loro tangenti, ritrovare la tangente della ſomma di tutti queſti archi, il che ſi potrà fare nella ſeguente maniera.

Sieno in primo luogo tre gli archi dati, e le tangenti loro ſieno $a, b, c$. Per l'antecedente ſoluzione ſarà $\frac{rr \times \overline{a+b}}{rr - ab}$ la tangente della ſomma di due archi, de' quali le tangenti ſieno $a$, $b$; ſi chiami queſta tangente $z$, e però ſarà $z = \frac{rr \times \overline{a+b}}{rr - ab}$, ma per la ſteſſa ſoluzione ſarà $\frac{rr \times \overline{z+c}}{rr - zc}$ la tangente della ſomma di due archi, de' quali le tangenti ſieno $z$, $c$, e $z$ è la tangente della ſomma di due archi delle tangenti $a$, $b$; adunque $\frac{rr \times \overline{z+c}}{rr - zc}$ ſarà la tangente della ſomma di tre archi delle tangenti $a$, $b$, $c$, e ſoſtituendo in queſta eſpreſſione in luogo di $z$ il ſuo valore $\frac{rr \times \overline{a+b}}{rr - ab}$, avremo la tangente della ſomma di tre archi

eſpreſ-

efpreffa con le fole tangenti date $a$, $b$, $c$, la quale farà

$$\frac{rr \times \overline{a + b + c - abc}}{rr - ab - ac - bc}.$$

Con lo fteffo artifizio averemo la tangente della fomma di quattro archi, effendo le tangenti date $a$, $b$, $c$, $f$, e farà

$$\frac{rr \times \overline{arr + brr + crr + frr - abc - abf - acf - bcf}}{rr \times \overline{rr - ab - ac - af - bc - bf - cf} + abcf}$$

La tangente della fomma di cinque, effendo le tangenti date $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, farà

$$\frac{r^4 \times \overline{a + b + c + f + g} - rr \times \overline{abc + abf + acf + abg + bcf + acg + bcg + bff + afg + cfg} + abcfg}{rr \times \overline{rr - ab - ac - af - ag - bc - bf - bg - cf - cg - fg} + abcf + abcg + abfg + acfg + bcfg},$$

e così di quant' altri archi fi vuole; dalle quali cofe fi cava una regola generale per formare la frazione, che efprima la tangente della fomma di quanti fi voglia archi dati, e farà quefta:

Per formare il numeratore della frazione fi prendano le fomme di tutti i poffibili prodotti di numero difpari, che fi poffono fare colle tangenti date, per efempio, fe le tangenti fono fette, fi prenda la fomma di tutte quefte tangenti, indi la fomma di tutti i terni, che fare fi poffono, poi la fomma di tutte le cinquine, e finalmente il prodotto di tutte fette; quefte fomme fi moltiplichino per tanta poteftà del raggio, quanta a ciafcuna fa bifogno, perchè fieno di dimenfione maggiore d'un' unità del numero delle tangenti date, ed a quefte fomme fi prefigga alter-

alternativamente il segno + e —, cioè alla somma di tutte il segno +, alla somma di tutti i terni il segno —, e così di mano in mano, e sarà fatto il numeratore.

Per formare il denominatore si prenda il quadrato del raggio, indi la somma di tutti i prodotti di numero pari, che si possono fare colle tangenti date, cioè tutti gli ambi, tutti i quaderni ec., questo quadrato del raggio, e la somma di tutti gli ambi, di tutti i quaderni, di tutte le sestine ec. si moltiplichino in tanta potestà del raggio, quanta a ciascuna fa bisogno, perchè sieno di dimensione eguale al numero delle tangenti date. Al quadrato del raggio si prefiggà il segno +, a tutti gli ambi il segno —, a' quaderni il segno +, e così alternativamente, e sarà fatto il denominatore.

La regola per sapere quanti sieno tutti gli ambi, e terni ec. possibili di un numero di quantità date sarà questa:

Si scriva il numero delle quantità date, indi si proseguisca la serie decrescente de' numeri naturali; sotto essi numeri per ordine si scriva la serie crescente de' numeri naturali cominciando dall'unità; poscia si faccia il prodotto di tanti termini della serie di sopra, quanto è l'indice della combinazione, che si vuol fare; si faccia pure il prodotto d'altrettanti termini della serie di sotto, e si divida un prodotto per l'altro, il quoziente sarà il numero cercato. Così per sapere quanti ambi, terni ec. si possono

fare,

fare, per esempio, di cinque quantità, si scriva 5, 4, 3, 2, 1.
1, 2, 3, 4, 5.

Il prodotto de' due primi numeri della serie di sopra è 20, che diviso per il prodotto de' due primi numeri della serie di sotto dà di quoziente 10; e però 10 saranno gli ambi. Il prodotto de' primi tre termini è 60, che diviso per il prodotto de' primi tre termini di sotto, cioè per 6, dà di quoziente 10, e però saranno 10 i terni ec.

Dalla soluzione di questo Problema si cava, come corollario, la soluzione di un'altro più semplice, cioè data la tangente di un' arco, ritrovare la tangente di un' arco moltiplo secondo un qualunque dato numero; imperocchè in questo caso basta fare tutte le tangenti date eguali tra loro, ed eguali alla tangente dell' arco dato. Sia per esempio la tangente dell'arco dato $= a$, e si cerchi la tangente dell'arco doppio, triplo ec. Nella formola, che abbiamo ritrovata per la tangente della somma di due archi dati, in vece della lettera $b$ si ponga sempre $a$, ed avremo la formola o espressione dell' arco doppio $\frac{2arr}{rr - aa}$.

Nella formola per la tangente della somma di tre archi dati in vece di $b$, e di $c$ si ponga per tutto $a$, ed avremo l'espressione dell' arco triplo $\frac{3arr - a^3}{rr - 3aa}$. Similmente dell'arco quadruplo sarà $\frac{4ar^4 - 4a^3 rr}{r^4 - 6aarr + a^4}$,

dell'

dell'arco quintuplo ſarà $\frac{5ar^4 - 10a^3rr + a^5}{r^4 - 10aarr + 5a^4}$, e così ſucceſſivamente.

Quindi ſi può formare la ſeguente progreſſione, o ſia canone generale per la tangente d'un' arco moltiplo ſecondo un qualunque numero intiero $n$

$$\frac{nr^{n-1}a - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}r^{n-3}a^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{1.2.3.4.5}r^{n-5}a^5 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}.\overline{n-6}}{1.2.3.4.5.6.7}r^{n-7}a^7 \text{ ec.}}{r^{n-1} - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}r^{n-3}aa + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}r^{n-5}a^4 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{1.2.3.4.5.6}r^{n-7}a^6 \text{ ec.}}$$

Ritrovata la tangente di un'arco moltiplo ſecondo un qualunque numero intiero, facilmente ſi ſcioglie il problema inverſo; cioè, data la tangente di un'arco, ritrovare la tangente d'un'arco ſubmultiplo ſecondo un qualunque numero intiero, vale a dire dividere un qualunque arco, o angolo in quante parti ſi vuole eguali. Imperocchè ſia la tangente dell'arco dato $b$, ed $n$ il numero, ſecondo cui ſi vuole l'arco ſubmultiplo, ſi prenda la tangente ritrovata per l'arco multiplo per lo numero $n$, in luogo di $a$ ſi ponga $x$, e così $x$ farà figura di tangente dell'arco ſubmultiplo. Queſta tangente dell'arco multiplo è adunque eguale alla data $b$, onde ſi avrà l'equazione, che ſi cercava per la incognita $x$.

Eſſendo adunque data la tangente $b$, il raggio $r$, ſarà l'equazione della tangente per l'arco ſubtriplo $x^3 - 3bxx - 3rrx + brr = 0$; per l'arco ſubquintuplo ſarà $x^5 - 5bx^4 - 10rrx^3 + 10brrxx + 5r^4x - br^4 = 0$ ec.

## PROBLEMA XIV.

109. *Ritrovare un triangolo* ALO ( Fig. 34. ), *i di cui lati* AO, LO, AL, *ed il perpendicolo* LI *ſieno in geometrica continua proporzione*.

Si prenda ad arbitrio un lato, per eſempio, $AL = a$, e ſia $OL = x$, ſarà per la condizione del problema $AO = \frac{xx}{a}$, ed $LI = \frac{aa}{x}$, e però $AI = \sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}}$, ed $IO = \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$; adunque $AI + IO = AO$, cioè $\sqrt{aa - \frac{a^4}{xx}} + \sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} = \frac{xx}{a}$, o ſia $\frac{xx}{a} - \sqrt{xx - \frac{aa}{xx}} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{xx}}$, e quadrando, $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xx}{a}\sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}} + xx - \frac{a^4}{xx} = aa - \frac{a^4}{xx}$, cioè $\frac{x^4}{aa} + xx - aa = \frac{2xx}{a}\sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$, e di nuovo quadrando, $\frac{x^8}{a^4} + \frac{2x^6}{aa} + x^4 - 2x^4 - 2aaxx + a^4 = \frac{4x^6}{aa} - 4aaxx$, e finalmente riducendo al comun denominatore, ed ordinando l'equazione, ſarà $x^8 - 2a^2x^6 - a^4x^4 + 2a^6xx + a^8 = 0$, la quale ſembra eſſere dell'ottavo grado, ma ſe ſi oſſerverà, ch'ella è un quadrato, fatta l'eſtrazione della radice, ſi troverà $x^4 - aaxx - a^4 = 0$, che è una quadratica affetta, e però traſportato all'altra parte il termine $a^4$, ed aggiunto ad ambi i membri dell'equazione

ne $\frac{a^4}{4}$, ed estratta la radice colla solita regola delle quadratiche affette, sarà $xx - \frac{aa}{2} = \pm \frac{\sqrt{5a^4}}{2}$, cioè $xx = \frac{aa \pm \sqrt{5a^4}}{2}$, e finalmente $x = \pm \sqrt{\frac{aa \pm \sqrt{5a^4}}{2}}$.

Quattro adunque saranno i valori della nostra incognita; ma si avverta, che la quantità $\sqrt{5a^4}$ è maggiore di $aa$, e però se si prenda la radicale $\sqrt{5a^4}$ negativa, cioè $-\sqrt{5a^4}$, la quantità sotto il vincolo radicale comune sarà negativa, quindi il valore della $x$ immaginario, e però due valori saranno immaginarj, cioè $x = \pm \sqrt{\frac{aa - \sqrt{5a^4}}{2}}$; e due reali, cioè $x = \pm \sqrt{\frac{aa + \sqrt{5a^4}}{2}}$, ambi eguali, ma positivo l'uno, e negativo l'altro.

Sull'indefinita $AQ$ si prenda $AL = a$, $LC = a\sqrt{5}$, e $CB = \frac{a}{2}$, e descritto sul diametro $AB$ il semicircolo $AFB$, si erigga la perpendicolare $CF$, sarà, per la proprietà del circolo, $CF = \sqrt{\frac{aa + aa\sqrt{5}}{2}} = x$. Divisa per metà $AC$ in $H$, col centro $A$, raggio $AH = \frac{a + \sqrt{5aa}}{2} = \frac{xx}{a}$ si descriva l'arco $HO$, dal punto $L$ si tiri $LO = CF$, e terminata all' arco $HO$, e si conduca $AO$, e la perpendicolare $LI$, sarà $ALO$ il triangolo ricercato. Imperocchè essendo $AL = a$, $LO = x = \sqrt{\frac{aa + aa\sqrt{5}}{2}}$, $AO = AH = \frac{xx}{a} = \frac{a + \sqrt{5aa}}{2}$, sarà

 $AO$,

$AO, LO :: LO, LA$. Ma i due quadrati di $AL$, e di $LO$ presi assieme, cioè $\frac{aa + aa + aa\sqrt{5}}{2}$, sono eguali al quadrato di $AO$, cioè $\frac{6aa + 2a\sqrt{5aa}}{4}$, adunque l'angolo $ALO$ è retto, e però sarà $AO, LO :: AL, LI$; ma perchè è pure $AO, LO :: LO, LA$, sarà anche $LO, LA :: LA, LI$, il che ec. L'altro valore negativo, che è eguale al positivo, servirebbe per la costruzione al di sotto della linea $AB$.

## PROBLEMA XV.

110. *Dividere in tre parti eguali un dato angolo.*

Tre casi comprende il proposto Problema; l'uno quando l'angolo dato sia retto; l'altro quando sia ottuso; ed il terzo quando sia acuto.

In primo luogo sia (*Fig.* 35.) l'angolo retto $MAB$, che si supponga diviso in tre parti eguali dalle rette $AC$, $AD$, e sia $AB = a$, ed alzata in $B$ la perpendicolare $BC$, prodotta incontri in $D$ la $AD$, e dal punto $D$ si conduca $DM$ parallela ad $AB$, e si chiami $BC = x$, sarà $AC = \sqrt{aa + xx}$, ma poichè l'angolo $CAD$ deve essere eguale all'angolo $DAM$, e per le parallele $AM$, $BD$ l'angolo $DAM$ è eguale all'angolo $ADC$, saranno eguali gli angoli $CDA$, $CAD$; e però $CD = CA = \sqrt{aa + xx}$, quindi $BD = x + \sqrt{aa + xx}$. Ma devono essere in oltre eguali

i due

i due angoli $BAC$, $CAD$, o ſia $CDA$, e però ne' due triangoli $BDA$, $CAB$ ſarà l'angolo $CAB$ eguale all' angolo $BDA$, e l'angolo $B$ retto è comune, adunque anche il terzo $BCA = BAD$, e però ſimili i triangoli; quindi averemo $AB, BC :: BD, AB$, cioè $a, x :: x + \sqrt{aa + xx}, a$, e però l'equazione $aa = xx + x\sqrt{aa + xx}$, e traſportando il termine $xx$, e quadrando, ſarà $aaxx + x^4 = a^4 - 2aaxx + x^4$, cioè $3aaxx = a^4$, e finalmente $x = \pm\sqrt{\frac{aa}{3}}$.

Si produca $AB$ in $S$, onde ſia $BS = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$; ſul diametro $AS$ ſi deſcriva il ſemicircolo $ACS$, l'ordinata $BC$ ſarà $= \sqrt{\frac{aa}{3}} = x$. Condotta adunque $AC$ al punto $C$, e preſa $CD = AC$, e condotta $AD$, ſarà il dato angolo diviſo in tre parti eguali. Imperocchè eſſendo $BC = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, ſarà

$AC = \sqrt{\frac{4aa}{3}} = CD$, ed $AD = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} =$ $\sqrt{aa + \frac{5aa}{3} + 2a\sqrt{\frac{4aa}{9}}} = 2a$, e però $AD, AB :: 2a, a :: 2, 1$; e $DC, CB :: \sqrt{\frac{4aa}{3}}, \sqrt{\frac{aa}{3}} :: 2, 1$, cioè nella medeſima ragione di $AD$, $AB$; adunque, per la terza del ſeſto d'Euclide, l'angolo $BAC = CAD$, e per eſſere $CD = CA$, ſarà pure l'angolo $CAD = CDA = DAM$, il che ec.

Il

Il valore negativo, che al positivo è eguale, servirebbe per la divisione dell' angolo $mAB$.

Sia l'angolo $BAM$ ottuso (*Fig.* 36.), condotta parallela ad $AM$ la $BD$, e fatto il resto come sopra, si tiri $AR$ normale a $BD$. Poichè l'angolo $ABD$ è noto, per essere il supplemento del dato $MAB$, e l'angolo $R$ è retto, ed è data la $AB$, sarà pure nota ancora la $BR$, che si chiami $= b$, e però $AR = \sqrt{aa - bb}$, $CR = x - b$, $AC = \sqrt{aa - 2bx + xx} = CD$; $BD = x + \sqrt{aa - 2bx + xx}$, quindi per i triangoli simili $ABC$, $ABD$ sarà $AB, BC :: BD, BA$, cioè $a, x :: x + \sqrt{aa - 2bx + xx}, a$, vale a dire $aa = xx + x\sqrt{aa - 2bx + xx}$, e levando l'asimmetrìa, $2bx^3 - 3aaxx + a^4 = 0$, equazione solida del terzo grado, che per ora si lascierà da me intatta.

Sia finalmente l'angolo $BAM$ acuto (*Fig.* 37.), la perpendicolare dal punto $A$ a $DB$ prodotta caderà al di sotto del punto $B$ in $R$, e però sarà $RC = b + x$, $AC = \sqrt{aa + 2bx + xx}$, quindi ripetuto lo stesso discorso del caso antecedente, averassi l'equazione $2bx^3 + 3aaxx - a^4 = 0$, diversa dall'antecedente solo ne' segni ec.

CAPO

# C A P O III.

*Della costruzione de' luoghi, e de' Problemi indeterminati, che non eccedono il secondo grado.*

111. Cosa sieno i problemi indeterminati, e come esiggano le due incognite si è veduto al num. 84. Dal variarsi adunque in infiniti modi il valore di una delle due incognite, in altrettanti infiniti modi pure si variano i valori dell'altra, quindi chiamansi esse le variabili dell' equazione o del problema, e la relazione loro o sia la legge, che osservano, viene espressa dall' equazione. Per tanto l'equazione $bx = ay$ ci fa sapere, che variandosi la $x$, si varia altresì la $y$, ma con tal legge, che la stessa $x$ abbia sempre però alla $y$ la costante ragione della $a$ alla $b$; Così l'equazione $ab = xy$ esprime la legge, che il prodotto delle due incognite sia sempre costante, ed eguale al prodotto di $a$ in $b$; L'equazione $ax = yy$ esprime, che il quadrato della $y$ debba sempre essere eguale al rettangolo della $x$ nella costante $a$, e così di tutte l'altre si discorra.

112. Una delle due incognite, per esempio $x$, deve avere origine da un punto fisso, e si prenda sopra una retta indefinita, indi se fissato per questa un determinato valore, dall' estremità si alzi un' altra retta nell' angolo dato del problema, e si prenda di tale grandezza, di quanta deve essere l'altra incognita $y$ per la natura dell' equa-

equazione relativamente al valore fissato per la $x$, e ciò si vada replicando per ogni vario valore, che si assegni alla $x$; la linea, che passerà per le estremità di tutte le $y$, si chiama il luogo dell'equazione. La incognita, che dal punto fisso si prende sulla retta indefinita, si dice l'Assissa, e l'altra in angolo l'Ordinata; ed ambe assieme diconsi le Coordinate dell'equazione.

Fatta adunque, rispetto all' equazione $bx = ay$, sull' indefinita $AM$ (*Fig.* 38.) la $AB = a$, ed alzata in qualunque angolo la $BC = b$, se si prenda $x = AD$, sarà la quarta proporzionale parallela a $BC$, cioè $DE = y$; e presa $x = AF$, sarà $FG = y$; presa $x = AK$, sarà $KH = y$, e così d'infinite altre, e la linea, in cui trovansi tutti gl' infiniti punti $C$, $E$, $G$, $H$ ec. in questo modo determinati, sarà il luogo dell' equazione $bx = ay$.

Nello stesso modo rispetto all'equazione $ax = yy$ (*Fig.* 39.) se si prenda $x = AB$, e $BC$ eguale alla $\sqrt{ax}$, cioè media proporzionale fra $AB$, e la data $a$, sarà $BC = y$; e presa $x = AD$, e $DE$ media proporzionale fra $AD$, ed $a$, sarà $DE = y$; presa $x = AG$, e $GF$ media proporzionale tra $AG$ ed $a$, sarà $GF = y$ ec.; ed i punti $C$, $E$, $F$, ed altri infiniti in simil modo determinati formano la linea $ACEF$, che è il luogo dell'equazione $ax = yy$, e medesimamente s'intenda d'ogni altra equazione.

113. Dalla diversa legge, che esprime l'equazione, cioè dalla diversa relazione, che tra se ânno le due incognite, diverse nascono le linee e di genere, e di grado,

o sia

o ſia i luoghi di modo, che è facile a vedere, che il luogo dell' equazione $bx=ay$ ſarà una linea retta; imperciocchè avendo la $y$ alla $x$ una coſtante ragione, per eſſere $y=\frac{bx}{a}$, una qualunque $ED$ (*Fig.* 38.) ſarà ad $AD$, come una qualunque altra $FG$ ad $AF$, e però ſimili ſaranno i triangoli $AED$, $AGF$; il che verificandoſi di qualunque altro punto $H$ ec. biſognerà, che per neceſſità eſſi punti ſieno in una retta linea. Ma l'equazione $ax=yy$ eſigge non già, che (*Fig.* 39.) le $BC$, $DE$ ec., ma bensì i loro quadrati abbiano una coſtante ragione alle corriſpondenti $AB$, $AD$ ec., onde è, che non ſaranno in una retta, ma in una curva i punti $C$, $E$, $F$, ec. Così una curva di genere da queſta diverſo ſarebbe il luogo dell' equazione $xy=ab$; ed una curva di genere, e di grado diverſo il luogo di queſt' altra $a^3-x^3=y^3$, ed altre infinite.

114. Qualunque volta l'equazione non contenga in alcun termine nè il quadrato, o poteſtà maggiore dell'una o dell' altra incognita, nè il prodotto di eſſe, il luogo ſarà ſempre una linea retta.

115. E quando nell' equazione vi ſia il quadrato dell' una o dell' altra, o d'ambe le incognite, o il rettangolo loro, o pure e quelli, e queſto, comunque ſiaſi, ma però neſſun termine contenga poteſtà maggiore del quadrato di eſſe incognite, o prodotto maggiore del rettangolo; vale a dire, in neſſun termine le incognite o ſole, o aſſieme moltiplicate eccedano la ſeconda dimenſione,

il luogo sarà sempre una delle Sezioni Coniche d'Apollonio. Nè meglio si potranno dimostrare queste verità, quanto col costruire attualmente tutte le varie equazioni di tal natura.

116. Le equazioni, che contengono le incognite ad una sola dimensione, cioè i luoghi alla linea retta, si chiamano luoghi, o linee del primo ordine, quelle che o sole, o assieme moltiplicate le contengono a due dimensioni, cioè i luoghi alle sezioni coniche, si chiamano luoghi o linee del secondo ordine, e però curve del primo genere; si dicono linee o luoghi del terzo ordine, e però curve del secondo genere quelle equazioni, nelle quali le incognite ascendono alla terza dimensione, e così successivamente.

117. E quanto ai luoghi alla linea retta; si comprendono essi tutti sotto queste equazioni:

$$y = \frac{ax}{b}$$

$$y = -\frac{ax}{b}$$

$$y = \frac{ax}{b} + c$$

$$y = -\frac{ax}{b} - c$$

$$y = \frac{ax}{b} - c$$

$$y = -\frac{ax}{b} + c$$

giac-

giacchè con la moltiplicazione, e divisione si può sempre ridurre la $y$ ad essere libera da frazioni, e coefficienti. Per $\frac{a}{b}$ s'intenda l'aggregato di tutte le quantità note, che moltiplicano la $x$, e per $c$ l'aggregato di tutte le quantità, che formano il termine costante.

Per costruire le prime due; sulla $AD$ indefinitamente prodotta d'ambe le parti si prenda $AB = b$, e si alzi $BC = a$, (*Fig.* 40.) che faccia l'angolo $ABC$, che devono fare le due variabili del problema; per i punti $A$, $C$ si conduca una retta indefinita $HE$, sarà essa il luogo delle due equazioni $y = \frac{ax}{b}$, $y = -\frac{ax}{b}$; imperciocchè presa una qualunque $AD = x$, e condotta $DE$ parallela a $BC$, sarà $DE = \frac{ax}{b} = y$; e presa $AF = -x$, e condotta $FH$ parallela a $BC$, sarà $FH = -\frac{ax}{b} = y$.

La terza, e quarta si costruiranno così: Parallelamente a $BC$ si prenda $AN = AM = c$, e si conducano $NK$, $MG$ indefinite, e parallele ad $HE$, sarà $NK$ il luogo della equazione $y = \frac{ax}{b} + c$, ed $MG$ il luogo dell' equazione $y = -\frac{ax}{b} - c$; poichè, presa $AD = x$, sarà $DE = \frac{ax}{b}$, ma è $EK = AN = c$ (fatta $DK$ parallela a $BC$) dunque $DK = \frac{ax}{b} + c = y$; e presa $AF = -x$, e fatta $FG$ parallela a $BC$, sarà $FG = -\frac{ax}{b} - c = y$.

 Rif-

Rispetto alla quinta; fatto lo stesso triangolo $ABC$, (*Fig.* 41.) e prodotte indefinitamente le $AE$, $AD$, si abbassi $AM = c$, e parallela a $BC$; indi dal punto $M$ si conduca $MK$ indefinita parallela ad $AE$, che incontrerà in $Q$ la retta $AD$, sarà $QK$ il luogo dell'equazione $y = \frac{ax}{b} - c$; imperocchè, presa una qualunque $AD = x$, e fatta $DE$ parallela a $BC$, sarà $DE = \frac{ax}{b}$; ma $KE = AM = c$; dunque $DK = \frac{ax}{b} - c = y$. La porzione $QM$ servirà quando $\frac{ax}{b}$ sia minore di $c$, cioè quando $x$ si prenda minore di $AQ$, o sia minore di $\frac{bc}{a}$, poichè in questo caso la $y$ sarà negativa, e però dovrà prendersi al di sotto di $AD$, cioè in senso contrario della $DK$.

Finalmente per l'ultima; fatta $AB = b$, $BC = a$, (*Fig.* 42.) e l'angolo $ABC$ eguale al supplemento dell' angolo, che devono fare le due variabili del problema, sia $AM = c$ e parallela a $BC$, e si tiri $MQR$ parallela ad $AC$, che taglierà $AB$ prodotta in $Q$, sarà $MQR$ il luogo dell'equazione $y = c - \frac{ax}{b}$; poichè, presa una qualunque $AD = x$, e fatta $DE$ parallela a $BC$, sarà $DE = \frac{ax}{b}$, ma prodotta $ED$ in $K$, sarà $EK = AM = c$, adunque $DK = c - \frac{ax}{b} = y$. Che se si prenda $x$ maggiore

re

re di $AQ$, per esempio $=AI$, sarà $IT = \frac{ax}{b}$, e però $c - \frac{ax}{b}$ quantità negativa $= y = IP$ presa appunto in senso contrario della $DK$, e la indefinita $MR$ il luogo dell' equazione proposta nell'uno, e nell'altro caso.

118. Occorre alle volte, che nella soluzione di un qualche problema, il di cui luogo sia alla linea retta, o l'una, o l'altra sparisce delle due variabili, e non entra nell'equazione, in questi casi il luogo sarà alla perpendicolare, o alla parallela alla data retta, sopra di cui si prendono le assisse, secondo che o l'ordinata sparisce, o l'assissa.

Eccone due Esempj:

Data la retta $AB$, (*Fig.* 43.) si ricerca il luogo de' punti $M$ fuori di essa tali, che condotte le rette $MA$, $MB$ alle estremità di $AB$, sia sempre $MA = MB$. Presa una qualunque $AH = x$, si alzi $HM = y$, e fatta $AB = a$, sarà $HB = a - x$, $AM = \sqrt{xx + yy}$, $BM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, e però l'equazione $\sqrt{xx + yy} = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, e quadrando, $xx + yy = aa - 2ax + xx + yy$, cioè $\frac{a}{2} = x$, in cui la $y$ è sparuta, e la $x$ è rimasta determinata; e ciò vuol dire, che presa $x$ eguale alla $AH$ metà di $AB$, e dal punto $H$ alzata la perpendicolare indefinita, ogni punto di essa soddisfarà alla questione, e però essa sarà il luogo ricercato.

Sieno

Sieno date di posizione le parallele $CG$, $AP$, (*Fig.* 44.) e tra esse si cerchi il luogo di tutti i punti $M$ tali, che condotta $MP$ perpendicolare ad $AP$, ed $MG$, che faccia l'angolo $MGC$ eguale a un dato $AEC$, sia sempre $MP$ ad $MG$ nella costante ragione di $a$ alla $b$. Chiamata la distanza $AC = c$, $AP = x$, $PM = y$, e prodotta $PM$ in $F$, sarà $FM = c - y$, ma poichè è dato l'angolo $AEC$, e l'angolo $ACE$ è retto, ed è dato il lato $AC$, sarà anche noto il lato $AE$, che si chiami $= f$. Ora, per la similitudine de' triangoli $ACE$, $FMG$, sarà $AC, AE :: MF, MG$, cioè $c, f :: c - y, \frac{cf - fy}{c} = MG$; ma deve in oltre essere $PM, MG :: a, b$, dunque sarà $y, \frac{cf - fy}{c} :: a, b$; e però $bcy = acf - afy$, o sia $y = \frac{acf}{bc + af}$; ed ecco l'equazione senza, che v'entri l'incognita $x$. Adunque presa comunque si voglia la $x$, sarà sempre costante la $y$, ed eguale ad $\frac{acf}{bc + af}$, e però condotta la indefinita $BM$ parallela ad $AP$, e distante da essa $AP$ quant' è $\frac{acf}{bc + af}$, sarà essa il luogo cercato.

119. Spiegate le costruzioni dei luoghi alla linea retta, vengono le costruzioni delle equazioni del secondo grado, cioè de' luoghi alle Sezioni Coniche. E quì suppongo prima informati abbastanza i Lettori delle principali proprietà geometriche di esse sezioni del cono,

no, per indi formare le prime e più semplici equazioni di esse curve, alle quali semplici equazioni si possano poi ridurre e rapportare, coi metodi da spiegarsi, le equazioni più complicate.

Ed in primo luogo si sa, che nel circolo una qualunque ordinata è media proporzionale tra i segmenti del diametro; cioè, che il quadrato di essa è eguale al rettangolo degli stessi segmenti. Se adunque nel circolo $MKCN$ (*Fig.* 45.) si farà il raggio $AC=a$, e dal centro $A$ una qualunque assissa $AB=x$, e l'ordinata $BD$ perpendicolare $=y$, sarà $MB=a+x$, $BC=a-x$, e però $MB\times BC=aa-xx$; adunque sarà $yy=aa-xx$, equazione al circolo rispetto al quadrante $KC$. Ma poichè la stessa proprietà si verifica anche, presa per ordinata $BE$, cioè l'ordinata negativa $-y$, e tanto il quadrato di $y$, quanto di $-y$ è $yy$, adunque la stessa equazione compete ancora al quadrante $CN$. Che se si prendano le assisse negative, come $AH=-x$, e le ordinate $HF=y$, $HG=-y$, il quadrato loro, cioè $yy$ sarà in ambi i casi eguale al rettangolo $MH\times HC$, ma quando sia $AH=-x$, sarà $CH=CA+AH=a-x$, ed $MH=AM-AH=a+x$, per le regole della somma, e sottrazione; e però il rettangolo $MH\times HC$ sarà $aa-xx$, adunque $yy=aa-xx$ è l'equazione semplicissima, che compete a tutto il circolo del raggio $a$, prendendo le assisse dal centro.

Se si prenderanno le assisse non dal centro $A$, ma

ma dall'estremità $M$ del diametro, fatta una qualunque $MH$, o $MB$ eguale ad $x$, sarà $HC$, o $BC = 2a - x$, ed il rettangolo de' segmenti eguale a $2ax - xx$; ma il quadrato dell'ordinata sì positiva, come negativa è $yy$, adunque sarà $yy = 2ax - xx$, equazione semplicissima del medesimo circolo, prendendo le assisse non dal centro, ma dall'estremità del diametro.

Per la quantità $a$, che esprime il raggio, s'intenda una qualunque quantità data semplice, o complessa, intiera, o rotta, razionale, o sorda di modo, che $yy = aa - bb - xx$ sarà il circolo del raggio $= \sqrt{aa - bb}$; $yy = \frac{aab}{m} - xx$ sarà il circolo del raggio $= \sqrt{\frac{aab}{m}}$; $yy = a\sqrt{ab} - xx$ sarà il circolo del raggio $\sqrt{a\sqrt{ab}}$; così $yy = 2ax - bx - xx$ sarà il circolo del diametro $2a - b$, o sia del raggio $\frac{2a - b}{2}$; $yy = \frac{aax + abx}{b} - xx$ sarà il circolo del diametro $= \frac{aa + ab}{b}$; $yy = x\sqrt{ab} - xx$ sarà il circolo del diametro $= \sqrt{ab}$ ec.

E' manifesto, che se nell'equazione $yy = aa - bb - xx$, ed in tutte le altre simili, la quantità $b$ fosse maggiore di $a$, essendo allora $aa - bb$ quantità negativa, il circolo sarebbe immaginario, poichè se $yy = aa - bb - xx$, è anche $y = \sqrt{aa - bb - xx}$; ma quando $aa - bb$ sia quantità negativa, $y$ è eguale a radice quadrata di quantità negativa, e però immaginaria. Per

Per la ſteſſa ragione degl'immaginarj non può nell' equazione $yy = 2ax - xx$ la aſſiſſa $x$ prenderſi negativa, imperciocchè, preſa $x$ negativa, ſarebbe negativo il termine $2ax$, e però l'equazione $yy = -2ax - xx$, cioè $y = \sqrt{-2ax - xx}$ quantità immaginaria.

120. La primaria proprietà della Parabola Apolloniana è, che il quadrato di una qualunque ordinata ſia eguale al rettangolo del parametro nell'aſſiſſa ſull'aſſe, ſe l'angolo delle coordinate è retto, o ſul diametro, ſe eſſo angolo è obbliquo. Adunque chiamato il parametro $= a$, una qualunque aſſiſſa $AB = x$, (*Fig.* 46.) la corriſpondente ordinata poſitiva $BC = y$, e la negativa $BD = -y$, ſarà $yy$ il quadrato tanto di $BC$, quanto di $BD$, ed $ax$ ſarà il rettangolo del parametro in $AB$, adunque $yy = ax$ è l'equazione ſempliciſſima, che compete alla parabola del parametro $= a$, in cui è chiaro, non poterſi prendere le aſſiſſe $x$ negative per cagione degl'immaginarj. E quì pure per la quantità $a$, che eſprime il parametro, s'intenda una qualunque quantità data, in cui ſia moltiplicata l'aſſiſſa $x$ di modo, che $\frac{aax \pm bbx}{c} = yy$ ſarà la parabola del parametro $= \frac{aa \pm bb}{c}$; $x\sqrt{ab} = yy$ ſarà la parabola del parametro $= \sqrt{ab}$ ec.

Se la parabola foſſe diverſamente poſta, (come nella *Fig.* 47.) e ſulla ſteſſa $AB$ dal dato punto $A$ ſi voleſſero le $x$, ſarebbe l'equazione $xx = ay$, in cui ſi poſſono prendere le $x$ poſitive e negative, ma ſolo poſitive le $y$.

121. Sieno le opposte Iperbole riferite agl'assi, o diametri, secondo che è retto, o obbliquo l'angolo delle coordinate, e sia $CB$ (*Fig.* 48.) l'asse, o il diametro trasverso, $HE$ il conjugato. Per la nota proprietà dell' iperbola, preso un qualunque punto $D$, ed alzata $DM$ parallela ad $HE$, deve essere il rettangolo di $CD \times DB$ al quadrato di $DM$, come il quadrato di $CB$ al quadrato di $HE$. Adunque chiamata $CB = 2a$, $HE = 2b$, e dal centro $A$ presa una qualunque $AD = x$, $DM$ positiva $= y$, $DM$ negativa $= -y$, sarà $CD = a + x$, $BD = x - a$, e però, per la detta proprietà, $xx - aa$, $yy :: 4aa$, $4bb$; cioè $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$. E presa $Ad$ negativa $= -x$, e le ordinate come sopra, sarà $Bd = -x + a$, $Cd = -x - a$, ed il rettangolo di $Bd \times dC = xx - aa$; onde nella stessa maniera avrassi $\frac{aayy}{bb} = xx - aa$, equazione semplicissima, che esprime le due intere opposte iperbole riferite agl'assi o diametri, prendendo le assisse dal centro. E se si prenderanno le assisse dal vertice $C$, avrassi l'analogìa (per la stessa proprietà) $x \times \overline{x - 2a}$, $yy :: 4aa$, $4bb$; cioè l'equazione $-2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$. E prese finalmente le assisse dal vertice $B$, avrassi $x \times \overline{2a + x}$, $yy :: 4aa$, $4bb$; e però l'equazione $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$.

E' anche proprietà primaria delle opposte iperbole, che

che lo ſteſſo rettangolo di $CD \times DB$, prendendo le aſſiſſe poſitive, e di $Bd \times dC$, prendendo le aſſiſſe negative, ſia al quadrato dell'ordinata sì poſitiva, che negativa, come l'aſſe, o diametro traſverſo al parametro; adunque chiamato eſſo parametro $= p$, ed il reſto come ſopra, ſarà $xx - aa, yy :: 2a, p$; cioè $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$, equazione ſempliciſſima, che eſprime intere le due oppoſte iperbole riferite al parametro, preſe le aſſiſſe dal centro; e preſe le aſſiſſe dal vertice $C$, ſarà l'equazione $\frac{2ayy}{p} = xx - 2ax$; e preſe finalmente le aſſiſſe dal vertice $B$, ſarà $2ax + xx = \frac{2ayy}{p}$.

Se le iperbole ſono equilatere, poichè in queſto caſo i due aſſi, o diametri ſono eguali tra loro, ed eguali al parametro, l'una e l'altra equazione ſarà $yy = xx - aa$, preſe le aſſiſſe dal centro; $yy = 2ax + xx$, preſe le aſſiſſe dal vertice $B$; ed $yy = -2ax + xx$, preſe le aſſiſſe dal vertice $C$. Per la quantità $aa$ s'intenda un qualunque piano in qualſivoglia modo compleſſo, come pure per la quantità $bb$; e per $2a$, ſiccome pure per $p$ s'intenda una qualunque linea, di modo che nell'equazione $\frac{\overline{aa+ff} \times yy}{b\sqrt{ab}} = xx - aa - ff$ ſarà $\sqrt{aa+ff}$ il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo, e $2\sqrt{aa+ff}$ tutto l'aſſe, o diametro traſverſo, ſiccome $\sqrt{b\sqrt{ab}}$ il ſemiaſſe, o ſemidia-

metro conjugato , e $2\sqrt{b\sqrt{ab}}$ tutto l'aſſe , o diametro conjugato ; nell'equazione $\frac{a^3yy}{bbc} = xx - \frac{a^3}{c}$ ſarà $\sqrt{\frac{a^3}{c}}$ il ſemiaſſe , o ſemidiametro traſverſo , e $b$ il conjugato ; nell'equazione $xx - bx = \frac{byy}{c+m}$ ſarà $b$ il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo , e $c+m$ il parametro ; nell'equazione $\frac{2yy\sqrt{aa-bb}}{a-b} = xx - aa + bb$ ſarà $2\sqrt{aa-bb}$ l'aſſe, o diametro traſverſo , $a-b$ il parametro ec.

Se le oppoſte iperbole foſſero diverſamente poſte , come nella *Fig.* 49. , e ſullo ſteſſo diametro $CB$, eguale a $2a$ , prodotto ſi voleſſero le $x$ poſitive , e negative dal centro $A$ ( eſſendo $HE = 2b$ ) , ſarebbe l'equazione $yy - bb = \frac{bbxx}{aa}$ .

122. Nell'iperbola frà gl'aſintoti ( *Fig.* 50. ) il rettangolo di una qualunque $AB$ preſa ſull' aſintoto $bB$ nella $BC$ ordinata parallela all' aſintoto $MN$ , o di $Ab \times bc$ , è ſempre coſtante , cioè eguale ad un rettangolo noto ; e però fatta $AB = x$ , $BC = y$ , ed il noto rettangolo $= ab$ , ſarà $xy = ab$ , e preſa $Ab$ negativa $= -x$ , e $bc$ negativa $= -y$ , il rettangolo di $Ab \times bc$ ſarà pure $xy$ , e però $xy = ab$ l'equazione ſempliciſſima delle oppoſte iperbole frà gl'aſintoti . E' chiaro , che l'equazione $-xy = ab$ , o $xy = -ab$ ſervirà per le iperbole oppoſte negl'angoli $BAM$ , $bAN$ , eſſendo ſempre

una

una delle coordinate positiva, e l'altra negativa, e però il loro prodotto negativo.

123. Nell'Ellissi $CEBH$ (*Fig.* 51.) presa dal centro $A$ una qualunque $AD$ sull'asse o diametro trasverso $CB$, e condotta $DM$ parallela all'asse o diametro conjugato $EH$, deve essere, per la nota proprietà, il rettangolo di $CD \times DB$ al quadrato di $DM$, come il quadrato dell'asse o diametro trasverso $CB$ al quadrato del conjugato $HE$. Adunque chiamata $CB = 2a$, $HE = 2b$, e dal centro $A$ presa una qualunque $AD = x$, e fatta $DM$ positiva $= y$, $DM$ negativa $= -y$, sarà $CD = a + x$, $DB = a - x$, e però $aa - xx$, $yy :: 4aa$, $4bb$; cioè $\frac{aayy}{bb} = aa - xx$. E presa $Ad$ negativa $= -x$, e le ordinate, come sopra, sarà $Bd = BA + Ad = a - x$, $dC = AC - Ad = a + x$, e però il rettangolo di $Bd \times dC$ sarà pure $aa - xx$, onde medesimamente avrassi $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, equazione semplicissima dell'ellissi, prese le assisse dal centro; e se si prenderanno le assisse dal vertice $C$, avrassi l'analogìa $2ax - xx$, $yy :: 4aa$, $4bb$; e però l'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$.

E' anche proprietà nota dell'Ellissi, che gli stessi rettangoli sieno ai quadrati delle corrispondenti ordinate, come l'asse o diametro trasverso al parametro; adunque chiamato esso parametro $= p$, ed il rimanente come so-

pra,

pra, sarà $aa - xx$, $yy :: 2a$, $p$; e però $\frac{2ayy}{p} = aa - xx$, equazione semplicissima dell'ellissi riferita al parametro, prese le assisse dal centro; e prese le assisse dal vertice $C$, sarà l'equazione dell'ellissi riferita al parametro $\frac{2ayy}{p} = 2ax - xx$.

Se i due assi fossero eguali tra loro, nel qual caso sono anche eguali al parametro, l'una, e l'altra equazione sarebbe $yy = aa - xx$, prese le assisse dal centro, e $2ax - xx = yy$, prese le assisse dal punto $C$. Ma parlando di asse, e non di diametro, gl'angoli delle coordinate sono retti, quindi l'ellissi passa ad essere un circolo del raggio $= a$.

La osservazione fatta nelle iperbole intorno alle quantità date $aa$, $bb$, $2a$, e $p$, rispetto a' diametri, e parametro, si faccia egualmente nell'ellissi, senza altro ripetere le cose da se troppo chiare.

124. Nelle equazioni adunque dell'iperbole, e dell'ellissi riferite agl'assi, o diametri, prese le assisse dal centro, come

$$\frac{aayy}{bb} = xx - aa,$$

$$\frac{aayy}{bb} = aa - xx,$$

la radice quadrata del termine costante, cioè di $aa$, sarà sempre il semiasse, o semidiametro trasverso; e se il coefficiente del quadrato dell'ordinata è lo stesso termine costante

ſtante diviſo per una qualunque quantità data , la radice di queſto diviſore è ſempre il ſemiaſſe , o ſemidiametro conjugato , cioè la radice di $bb$ ; ma ſe eſſo coefficiente non è tale, vale a dire non contiene nel detto modo il termine coſtante, il ſemiaſſe o ſemidiametro conjugato è diverſo . Così nell' equazione , per eſempio, $\frac{ffyy}{bb}=xx-aa$ il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo è ſempre bensì $a$, ma non è $b$ il conjugato . Per ritrovarlo ſi faccia l'analogìa : Come il numeratore del coefficiente del quadrato dell'ordinata al denominatore , così il termine coſtante al quarto, la di cui radice ſarà il ſemiaſſe, o ſemidiametro ricercato ; nelle equazioni poi dell'elliſſi, e dell'iperbole riferite agl'aſſi , o diametri , preſe le aſſiſſe dal vertice, come $\frac{aayy}{bb}=2ax-xx$, $\frac{aayy}{bb}=xx-2ax$, $\frac{aayy}{bb}=xx+2ax$, ſarà il ſemiaſſe, o ſemidiametro traſverſo la metà della quantità , che moltiplica l'incognita alla prima dimenſione , ed il conjugato , come ſopra ; avvertendo , che quando il coefficiente del quadrato dell'ordinata non ſia il quadrato dell'aſſe , o diametro traſverſo così ritrovato; l'analogìa per il ſemiaſse, o ſemidiametro conjugato ſarà: come il numeratore del coefficiente del quadrato dell'ordinata al denominatore, così il quadrato della metà della quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimenſione, al quarto; e la radice di eſso quarto propor-

zionale sarà il semiasse, o semidiametro conjugato.

Nell'equazione adunque dell'iperbola $\frac{ffyy}{bb} = xx - aa$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= a$, ed il conjugato $= \frac{ab}{f}$. Ed in fatti, poichè deve essere, per la proprietà della curva, il rettangolo della somma nella differenza del semiasse, o semidiametro trasverso, e dell' assissa al quadrato dell'ordinata, come il quadrato del asse, o diametro trasverso al quadrato del conjugato, sarà $xx - aa$, $yy :: 4aa, \frac{4aabb}{ff}$, o sia $\frac{4aayy}{4aabb} \times ff = xx - aa$, cioè $\frac{ffyy}{bb} = xx - aa$, equazione proposta.

Così nell' equazione $\frac{abyy}{cc} = aa - xx$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= a$, il conjugato $= \sqrt{\frac{acc}{b}}$. Nell' equazione $xx - 2ax = \frac{bbyy}{cm}$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= a$, il conjugato $= \frac{a\sqrt{cm}}{b}$. Nell'equazione $\frac{aa - bb}{cc} \times yy = xx - bb$ sarà il semiasse, o semidiametro trasverso $= b$, il conjugato $= \sqrt{\frac{bbcc}{aa - bb}}$ ec.

125. Se le equazioni sono riferite ai parametri, come $\frac{2ayy}{p} = aa - xx$, $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$, prese le assisse

dal

dal centro, o

$$\frac{2ayy}{p} = 2ax - xx, \quad \frac{2ayy}{p} = 2ax + xx, \quad \frac{2ayy}{p} = xx - 2ax,$$

prese le affisse dal vertice; sarà sempre nelle prime il semiasse, o semidiametro trasverso la radice del termine costante, e nelle seconde la metà del coefficiente dell' incognita alla prima dimensione, ed il parametro sarà sempre la quantità del denominatore del coefficiente del quadrato dell' ordinata, quando il numeratore del detto coefficiente nelle prime sia il doppio della radice del termine costante, e nelle seconde sia eguale alla quantità, che moltiplica l'incognita alla prima dimensione; ma quando il detto numeratore non abbia le accennate condizioni, sarà il parametro la quarta proporzionale del numeratore, del denominatore, e dell' asse, o diametro trasverso.

Nell' equazione adunque all' ellissi $aa - xx = \frac{byy}{c}$ sarà l'asse, o diametro trasverso $= 2a$, il parametro $= \frac{2ac}{b}$. Ed in fatti, poichè deve essere, per la proprietà della curva, il rettangolo della somma nella differenza del semiasse, o semidiametro trasverso, e dell' affissa al quadrato dell' ordinata, come l'asse, o diametro trasverso al parametro, sarà $aa - xx$, $yy$ :: $2a$, $\frac{2ac}{b}$; cioè $\frac{byy}{c} = aa - xx$, l'equazione proposta. Nell' equazione $xx - aa = \frac{3yy}{4}$, all'

iperbola, farà l'affe, o diametro trafverfo $= 2a$, il parametro $= \frac{8a}{3}$. Nell'equazione all'iperbola $2ax + xx = \frac{\overline{b-c} \times yy}{m}$ farà $2a$ l'affe, o diametro trafverfo, e $\frac{2am}{b-c}$ il parametro. Nell'equazione all'elliffi $aa - bb - xx = \frac{byy}{c}$ farà l'affe, o diametro trafverfo $= 2\sqrt{aa-bb}$, il parametro $= \frac{2c\sqrt{aa-bb}}{b}$, fuppofta $a$ maggiore di $b$, perchè altrimenti la curva farebbe immaginaria.

126. Suppofte, e bene intefe quefte tali cofe, è facile la coftruzione delle equazioni più complicate de' luoghi alle fezioni coniche, e ciò col ridurre l'equazione complicata ad una femplice e primaria delle fpiegate, quindi, dalla fezione del cono fuppofta la defcrizione di quefta, paffare alla coftruzione della propofta.

E per procedere con chiarezza diftinguerò in tre claffi tutte le equazioni alle fezioni coniche, intendendo delle compofte; dirò della prima claffe tutte quelle, che contengono il quadrato di una fola delle incognite, ed il rettangolo delle coftanti nell' altra incognita, come per efempio $ax \pm ab = yy$; ed altresì dirò della prima fpecie tutte quelle, che contengono i rettangoli delle incognite fra loro, e nelle coftanti, ma non ânno il quadrato nè dell'una, nè dell'altra incognita; come $xy + ax = aa - ay$, effendo i fegni comunque fi vuole, il che s'intenda dell' altre due fpecie ancora rifpetto ai fegni. Della

Della seconda ſpecie chiamerò quelle, nelle quali eſſendo il quadrato di una, o di ambe le incognite, ed i rettangoli di una, o di ambe eſſe incognite nelle coſtanti, non vi ſia il rettangolo delle incognite fra loro, come $xx + 2ax = ay + by$, o pure $xx - 2bx = yy + ay - ax$.

Della terza ſpecie ſono quelle, nelle quali vi è il rettangolo delle due incognite tra loro, e gli altri termini in qualunque modo, come $xx + 2xy + 2yy = aa - xx + bx$.

127. Per riconoſcere, e coſtruire le equazioni della prima ſpecie, fa d'uopo mettere in uſo una ſoſtituzione, la quale è di porre l'incognita, che non â il quadrato, più o meno (ſecondo i ſegni) una coſtante, eguale ad una nuova incognita, e così ridurre l'equazione (replicando, ſe biſogna, la detta ſoſtituzione) all' eſpreſſione più ſemplice, acciò poſſa facilmente conoſcerſi, e coſtruirſi il luogo della detta equazione, come ſi vedrà nei ſeguenti Eſempj.

## ESEMPIO I.

Sia $ax + ab = yy$, e ſia dato l'angolo, che fra loro devono fare le coordinate. Poichè $ax + ab$ è $a \times \overline{x + b}$, ſi faccia $x + b = z$, dunque ſoſtituendo ſarà $az = yy$, Parabola Apolloniana.

Alla indefinita $AB$, come diametro, col parametro $= a$ ſi deſcriva la parabola apolloniana $CAC$, (*Fig.* 52.) le di cui coordinate $AB$, $BC$ comprendano il dato angolo, indi

ſia $AD=b$; preſa una qualunque $AB=z$, ſarà $BC=y$; ma perchè abbiamo, per la ſoſtituzione, $x=z-b$, ſarà $DB$ la $x$. L'origine adunque delle aſſiſſe $x$ ſarà il punto $D$, preſe verſo $M$ le poſitive, verſo $A$ le negative, e le corriſpondenti ordinate poſitive, e negative ſaranno le $y$.

Se l'equazione propoſta foſſe ſtata $ax-ab=yy$, s'avrebbe fatta la ſoſtituzione $x-b=z$, e però $x=z+b$. In queſto caſo, preſa nel diametro prodotto $AE=b$, e fatto il rimanente come ſopra, il punto $E$ ſarebbe l'origine delle $x$.

## ESEMPIO II.

Sia l'equazione $xy+ax=aa-ay$; ſi faccia $y+a=z$, e ſoſtituendo in luogo di $y$ il valore $z-a$, avraſſi $zx+az=$ $=2aa$, e facendo un' altra ſoſtituzione di $x+a=p$, ſarà $pz=2aa$, Iperbola Apolloniana fra gli Aſintoti.

Comprendano le indefinite $MM$, $FF$ l'angolo dato delle coordinate; (*Fig.* 53.) e fra gli aſintoti $MM$, $FF$ ſi deſcrivano le due oppoſte iperbole del rettangolo coſtante $=2aa$. Preſa una qualunque $AC=p$, ed ordinata la $CE$ parallela ad $AM$, ſarà eſſa $=z$, ma per la ſoſtituzione ſi â $x=p-a$, dunque fatta $AB=a$, ſarà $BC=x$; e perchè ſi â pure per l'altra ſoſtituzione $y=z-a$, fatta $AN=a$, e condotta $NH$ parallela ad $FF$, ſarà $DE=y$. Tirata adunque $BQ$ parallela ad $AN$, ſarà $Q$ il principio delle $x$, coſicchè ad una qualunque aſſiſſa $QD=x$, corriſponderà l'ordinata $DE=y$ poſitiva tra il punto $Q$, ed il punto $P$, e negativa di

di là dal punto $P$, come la $HI$. Ma quando si prenda $p$ minore di $a$, cioè $AC$ minore di $AB$, allora comecchè $x = p - a$, sarà $x$ negativa, cioè verso $N$, e ad essa corrisponderanno le ordinate $y$ positive. Che se si prenda $p$ negativa eguale, per esempio, ad $AV$, sarà $x$ negativa, ed eguale a $QO$, e la $y$ negativa $= OE$. Se l'equazione fosse $xy + ax = aa + ay$, o pure $xy + ax = -aa - ay$, o questa $xy - ax = aa - ay$, o l'altra $xy - ax = -aa + ay$, le due prime sarebbero divisibili per $y + a$, e si avrebbe $x = \pm a$; le due altre sarebbero divisibili per $y - a$, e si avrebbe $x = \mp a$, e però non sarebbero esse luoghi, ma equazioni di problemi determinati. Ma se fosse $xy - ax = aa + ay$, la prima sostituzione sarebbe $y - a = z$, quindi l'equazione $zx - az = 2aa$, ed in conseguenza la seconda sostituzione sarebbe $x - a = p$, onde finalmente l'equazione $zp = 2aa$, e però in questo caso alle coordinate $p$, $z$ dovrebbesi aggiungere la quantità $= a$ per avere le $x$ ed $y$; adunque presa da $A$ verso $V$ la $AR = a$, e fatta $RG$ parallela ad $MN$, ed $= a$, indi per lo punto $G$ condotta $GT$ parallela ad $FF$, sarebbe $G$ l'origine delle $x$, e le corrispondenti ordinate le $y$.

Se fosse l'equazione $xy + ax = -aa + ay$, le sostituzioni sarebbero $y + a = z$, $x - a = p$, che ci darebbero l'equazione $pz = -2aa$.

Si descrivano le stesse iperbole, ma negli altri due angoli, per essere negativo il rettangolo costante $2aa$, e sieno le $ie$, $ie$; prodotta $GR$ in $L$, sarà $L$ l'origine delle $x$ positive e negative, e sulla retta $LQ$ prodotta d'ambe

le

le parti insisteranno le ordinate $y$, cioè negative da $N$ verso $H$, positive da $N$ al punto $i$, e di nuovo negative oltre il punto $i$.

Che se fosse $xy - ax = - aa - ay$, le sostituzioni sarebbero $y - a = z$, ed $x + a = p$. Descritte adunque le medesime iperbole $ie$, e prodotta $QB$ in $q$, sarà $q$ l'origine delle $x$, e sopra $TT$ insisteranno le ordinate $y$.

Se nelle equazioni fosse negativo il termine $xy$, si renda positivo colla trasposizione de' termini.

La diversità delle sostituzioni, e della posizione delle coordinate, che nasce dalla diversa combinazione de' segni nelle proposte equazioni, e che quì si è considerata, s'intenda di dotersi considerare anche in appresso, il che ommetterò per brevità.

Sin quì ô supposto, che le costanti dell' equazione sieno tali, che diano luogo alle accennate sostituzioni, che se tali non fossero, come per esempio, se fosse l'equazione $aa - bx = yy$, si faccia $aa = bc$, e si avrà $bc - bx = yy$, e la sostituzione da farsi sarà $c - x$ eguale ad una nuova incognita. Così se fosse $\frac{abb + cx}{m} = yy$, si faccia $bb = cf$, onde sia l'equazione $\frac{acf + cx}{m} = yy$, e si ponga indi $\frac{af + x}{m}$ eguale ad una nuova incognita.

Se fosse $\frac{aax - bbx + m^3}{a + b} = yy$, si faccia $aa - bb = cc$, ed $m^3 = ccf$, e sarà $\frac{ccx + ccf}{a + b} = yy$; e così dell'altre simili.

128. Per ridurre, e coſtruire le equazioni della ſeconda ſpecie; poſti da una parte del ſegno d'egualità col loro ordine tutti i termini, che contengono una ſteſſa incognita, e dall' altra parte tutti gli altri parimente col loro ordine, e fatto in modo, che nel primo membro dell' equazione il quadrato dell' incognita ſia poſitivo, e libero da' coefficienti, e frazioni, biſogna allo ſteſſo primo membro (ed al ſecondo ancora, per non alterare l'eguaglianza) aggiungere il quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine, ſe fa d'uopo, onde eſſo primo membro ſia un quadrato; quindi porre la radice di eſſo quadrato eguale ad una nuova incognita, la quale operazione ripetuta nel ſecondo membro ancora, ſe lo richiede, ci darà l'equazione ridotta alla forma ſempliciſſima, o ridotta alla prima ſpecie.

## ESEMPIO III.

Sia $xx + 2ax = ay + by$. Aggiunto al primo, e ſecondo membro il quadrato $aa$, ſarà eſſa $xx + 2ax + aa = aa + ay + by$, e però ponendo $x + a = z$, averaſſi $zz = aa + ay + by$, che è ridotta alla prima ſpecie; adunque fatta $a + b = c$, ed $aa = cf$, ſarà $cf + cy = zz$, e poſta $f + y = p$, ſarà $zz = cp$, equazione alla Parabola Apolloniana.

Col parametro $= c = a + b$, al diametro $AB$, e con le coordinate nel dato angolo ſi deſcriva la parabola $CAC$. (*Fig.* 54.) Preſa una qualunque aſſiſſa $AB = p$, la $z$ poſitiva e nega-

tiva farà $BC$; ma perchè $y = p - f$, cioè $= p - \frac{aa}{a+b}$, presa $AD = \frac{aa}{a+b}$, farà $DB = y$, ed a cagione della fostituzione $x + a = z$, dal punto $D$ alzata parallela a $BC$ la $DH = a$, che farà terminata dalla parabola in $H$, (come si vedrà facilmente fostituendo in luogo della $p$ nell' equazione ridotta $zz = cp$ il valore di $AD = \frac{aa}{a+b} = \frac{aa}{c}$, imperocchè farà $zz = aa$, e però $DH = z = a$) e condotta per lo punto $H$ la parallela $OE$ al diametro, farà $HE = DB = p - \frac{a^2}{a+b} = y$, ed in confeguenza $EC = z - a = x$ positiva, e negativa quando fieno positive le affiffe; ed alle affiffe negative, cioè prefe da $H$ verfo $O$, corrifponderanno ambe le ordinate negative.

## ESEMPIO IV.

Sia $xx + 2bx = yy - ay$. Aggiunto il quadrato della metà del coefficiente del fecondo termine, cioè $bb$, farà $xx + 2bx + bb = yy - ay + bb$, e fatta $x + b = z$, averaffi $zz = yy - ay + bb$, cioè $zz - bb = yy - ay$, ed aggiunto il quadrato della metà di $a$, farà $zz - bb + \frac{aa}{4} = yy - ay + \frac{aa}{4}$; pofta dunque $y - \frac{a}{2} = p$, farà $zz - bb + \frac{aa}{4} = pp$, e fuppofto $bb$ maggiore di $\frac{aa}{4}$, facendo $bb - \frac{aa}{4} = mm$, farà $zz - mm = pp$,

Iper-

Iperbola equilatera con i ſemidiametri $= m$, prendendo le aſſiſſe dal centro.

Nella indefinita $BD$ ſi prenda $BG = 2m = 2\sqrt{bb - \frac{aa}{4}}$, e diviſa egualmente in $A$; col centro $A$, col ſemidiametro traſverſo $= AG$ eguale al conjugato, e con le coordinate nel dato angolo ſi deſcrivano le due oppoſte iperbole equilatere (*Fig.* 55.); preſa una qualunque aſſiſſa $AD$ poſitiva e negativa $= z$, le corriſpondenti ordinate $DH$ ſaranno le $p$ poſitive, e negative, e perchè per la ſoſtituzione ſi â $x = z - b$; preſa $AE = b$, ſarà $ED = x$, ma eſſendo per l'altra ſoſtituzione $y = p + \frac{a}{2}$, dal punto $E$ condotta $EO = \frac{a}{2}$ parallela all' ordinata, che terminerà alla curva nel punto $O$, e per lo punto $O$ la indefinita $KK$ parallela al diametro $BG$, ſarà $KH = p + \frac{1}{2}a = y$. Sarà adunque il punto $O$ l'origine delle $x$ aſſiſſe ſulla retta $KK$, alle quali preſe poſitive corriſpondono due ordinate $y$, una poſitiva, e l'altra negativa; e preſe negative, ma non maggiori di $EG$, corriſponderanno due ordinate poſitive; preſe negative e maggiori di $EG$, ma minori di $EB$, le ordinate $y$ ſaranno immaginarie, e preſe negative maggiori di $EB$, e minori di $EI$, fatta $BI = GE$, ſaranno due ordinate poſitive, e finalmente un'ordinata poſitiva, e negativa l'altra, quando l'aſſiſſe negative ſieno maggiori di $EI$.

Quì deveſi avvertire, che la radice del quadrato $yy - ay + \frac{aa}{4}$ non è ſolo $y - \frac{a}{2}$, ma è pure $\frac{a}{2} - y$, e però le

foſtituzioni dovrebbero eſſer due, cioè tanto di $y-\frac{a}{2}=p$, quanto di $\frac{a}{2}-y=p$, ciò non oſtante però, e nel preſente eſempio, ed in altri in appreſſo della prima ſola mi ſervo, perchè conſiderandoſi nelle coſtruzioni la nuova incognita $p$ in ſenſo e poſitivo, e negativo, vi ſono compreſe quelle determinazioni ancora, che ci darebbe l'altra ſoſtituzione, che però rimane ſuperflua.

Se la quantità $bb$, che ô ſuppoſta maggiore di $\frac{aa}{4}$, foſſe all'oppoſto minore, il luogo ſarebbe alle ſteſſe oppoſte iperbole, mutandoſi ſolo le veci delle coordinate, e delle coſtanti; cioè ſarebbe l'equazione finale $zz=pp-mm$, la di cui coſtruzione quì ſi ommette, per non eſſer diverſa dalla precedente, ſe non che i ſemidiametri ſono in queſto caſo eguali ciaſcheduno alla $\sqrt{\frac{aa}{4}-bb}=m$. Se foſſe poi $bb=\frac{aa}{4}$, il luogo ſarebbe alla linea retta, come è chiaro.

129. Per riconoſcere, e coſtruire le equazioni della terza ſpecie; fa d'uopo, poſto da una parte del ſegno d'egualità il quadrato di una delle incognite reſo poſitivo, e libero da frazioni, e coefficienti con il rettangolo delle ſteſſe, e dall'altra parte il rimanente de' termini, aggiungere al primo membro (e per conſeguenza al ſecondo ancora) tale funzione dell'altra incognita, onde eſſo primo mem-

membro ſia un quadrato, indi porre la radice di eſſo eguale ad una nuova incognita, e fare la ſoſtituzione, con che averaſſi l'equazione ridotta all' eſpreſſione più ſemplice, o ad una delle due ſpecie di ſopra.

Così nell' equazione, per eſempio, $zz - \frac{2bzy}{a} = ay$ aggiungendo $\frac{bbyy}{aa}$ ad ambi i membri, ſarà il primo membro un quadrato, la di cui radice $z - \frac{by}{a}$ ſi ponga eguale ad una nuova incognita $p$, e fatta la ſoſtituzione, ſarà l'equazione $pp = \frac{bbyy}{aa} + ay$, che è della ſeconda ſpecie.

130. Ma deveſi avvertire, che alle volte queſta nuova incognita, che ſi vuole introdurre, deve eſſere affetta da qualche coefficiente coſtante, altrimenti ſarebbero molto imbrogliate le coſtruzioni, e però nell' equazione, per eſempio, $xx \pm \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = \pm fy \pm hx$, il di cui primo membro ſenz' altro aggiungere è già un quadrato, che â per radice $x \pm \frac{by}{a}$, ſe non vi foſſe il termine $hx$, o eſſendovi, ſi voleſſe eliminare eſſa $x$ dall' equazione, col porre in luogo della $x$ il ſuo valore cavato dalla ſoſtituzione fatta, di modo che foſſe eſpreſſa per la nuova incognita, e per la $y$ con le coſtanti; ſi faccia pure la ſoſtituzione $x \pm \frac{by}{a} = z$.

Ma non essendovi il termine $fy$, o se essendovi si volesse eliminare la $y$, si deve fare la sostituzione $x \pm \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$. E così rispettivamente se l'equazione fosse $yy \pm \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \pm fy \pm hx$; non essendovi, o volendosi eliminare il termine $fy$, si faccia la sostituzione $y \pm \frac{bx}{a} = z$; ma non essendovi, o volendosi eliminare il termine $hx$, si faccia la sostituzione $y \pm \frac{bx}{a} = \frac{bz}{a}$.

Generalmente non essendovi nell'equazione il rettangolo delle costanti nell'incognita, per cui è stata ordinata l'equazione, o se essendovi si voglia essa incognita eliminare, si ponga la radice del primo membro eguale ad una nuova incognita. Ma non essendovi il rettangolo delle costanti nell'altra incognita, per cui non è stata ordinata l'equazione, o se essendovi si voglia eliminare essa incognita; si ponga la radice del primo membro eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella metà del coefficiente costante del secondo termine del primo membro.

## ESEMPIO V.

Sia l'equazione $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = cx$. Si faccia $y + \frac{bx}{a} = z$, e sarà l'equazione $zz = cx$ alla parabola apolloniana. Se l'angolo delle coordinate $x$, $y$ della proposta equa-

equazione non fosse dato, ma fosse arbitrario, sarebbe chiara la costruzione del luogo; imperciocchè sulla retta indefinita $AB$ descritto il triangolo isoscele $ACD$ (*Fig.* 56.) colla base $CD=b$, ed i lati $AC=a=AD$; ed al diametro $AB$, col parametro $=c$, con le ordinate parallele a $DC$ descritta la parabola apolloniana dell'equazione ridotta $zz=cx$; prendendo una qualunque assissa $AB=x$, sarebbe $BM=z$; ma per i triangoli simili $ADC$, $ABE$ si â $EB=\frac{bx}{a}$, ed è, per la sostituzione fatta, $y=z-\frac{bx}{a}=EM$, e di più $AE=AB=x$; dunque sulla indefinita $AE$ presa una qualunque assissa $AE=x$, la corrispondente ordinata $EM$ positiva, e negativa sarà la $y$ dell'equazione proposta.

Ma perchè si suppone dato l'angolo delle coordinate $x, y$, a nulla serve la suddetta costruzione, e però si proceda così: Sulla indefinita $AB$ si descriva il triangolo $ACP$ con l'angolo $ACP$ eguale al supplemento del dato angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, e sia $AC=a$, $CP=b$. Prodotta $AC$ indefinitamente, e presa una qualunque $AE=x$, sarà (fatta $KK$ parallela a $PC$) $EH=\frac{bx}{a}$, quindi se $HK$ fosse $=z$, sarebbe $EK=y$, ed $AE$, $EK$ le coordinate $x$, $y$ dell'equazione proposta, e nel dato angolo; ma le $HK$ non possono essere le $z$ dell'equazione ridotta $cx=zz$, quando non siano ancora le assisse $AH$ eguali alla $x$, e non già le $AE$. Si avverta però che $AH$ sarà $=\frac{AP\times x}{a}$, cioè $=\frac{fx}{a}$ (chia-

ma-

mata $AP = f$, giacchè nel triangolo $ACP$ essendo dati il lato $AC$, il lato $CP$, e l'angolo $ACP$, è data pure la $AP$) onde la curva così descritta, chiamando $AE = x$, ed $HK = z$, ci darebbe l'equazione $\frac{cfx}{a} = zz$, la quale sarebbe appunto la nostra ridotta, se in luogo del parametro $c$ si avesse descritta la curva col parametro $\frac{ac}{f}$. Adunque per costruire il luogo proposto; sulla indefinita $AB$ si descriva il triangolo $ACP$ coi lati $AC = a$, $CP = b$, e l'angolo $ACP$ eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta; indi al diametro $AB$, col parametro $= \frac{ac}{f}$, cioè eguale alla quarta proporzionale di $AP$, di $AC$, e del parametro dell'equazione ridotta, (il che è generale qualunque volta il luogo è alla parabola) e con le ordinate parallele a $PC$ si descriva la parabola apolloniana; presa sulla indefinita $AE$ una qualunque $AE = x$, sarà $EK$ positiva e negativa $= y$, e la curva il luogo dell'equazione proposta. Ed in fatti sarà $\overline{HK}^2$ eguale al prodotto del parametro in $AH$, cioè $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{acfx}{af} = cx$.

Si usi lo stesso artifizio nell'altre equazioni all'iperbola, ed all'ellissi rispetto ai loro diametri, e parametri; con la sola differenza, che in queste il diametro trasverso, o conjugato, secondo che quello, o questo si deve variare

re ( e sarà sempre quello, a cui appartiene il triangolo $ACP$) sarà la quarta proporzionale di $AC$, di $AP$, e del diametro trasverso, o conjugato dell' equazione ridotta; ma rispetto poi al parametro, quando per esso sia data l'equazione, variato il diametro trasverso nel modo detto, sarà esso la quarta proporzionale di $AP$, di $AC$, e del parametro dell' equazione ridotta; che se non al diametro trasverso, ma al conjugato appartenga il triangolo $ACP$ ( essendo data l'equazione per il parametro ) sarà esso la terza proporzionale del parametro dell' equazione ridotta, e di $AP$, come facilmente si conoscerà dagli Esempj.

## ESEMPIO VI.

Sia $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = bx - cc - 2cy$. Fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{a} = z$, sarà $zz = bx - cc - 2cz + \frac{2bcx}{a}$, cioè $zz + 2cz + cc = \frac{abx + 2bcx}{a}$, e fatta di nuovo l'altra sostituzione $z + c = q$, sarà finalmente $qq = \frac{\overline{ab + 2bc} \times x}{a}$, equazione alla parabola apolloniana. Ma per costruirla relativamente alle nostre coordinate $x$, $y$: sulla indefinita $BH$ (*Fig.* 57.) si costruisca il triangolo $BDC$ coi lati $BD = a$, $DC = b$, e con l'angolo $BDC$ eguale al supplemento dell' angolo, che devono fare le coordinate $x$, $y$ dell' equazione proposta; si producano $BD$, $BC$ indefinitamente, dal punto

punto $B$ si abbassi $BA$ parallela a $DC$, ed eguale a $c$, indi col vertice $A$, al diametro $AE$ parallelo a $BC$, e con le ordinate $EP$ parallele a $CD$ si descriva la parabola apolloniana $PAP$ col parametro $= \frac{ab + 2bc}{f}$ (intendendo per $f$ la nota $BC$), e sulla indefinita $BF$ presa una qualunque assissa $BF = x$, sarà $BH = AE = \frac{fx}{a}$, ed $EP = q$, e però $HP = q - c = z$, ed $FH = \frac{bx}{a}$; adunque $FP = z - \frac{bx}{a} = y$ positiva, e negativa quando sia $x$ maggiore di $BO$, ed ambe le ordinate negative quando sia $x$ minore di $BO$.

Se nell'equazione proposta il rettangolo $2cy$ fosse stato affetto dal segno positivo, allora la seconda sostituzione sarebbe stata $z - c = q$, ed il parametro della parabola eguale ad $\frac{ab - 2bc}{a}$, e però fatte le stesse cose, come sopra, in vece di condurre $BH$ al di sopra della $AE$, diametro, s'averebbe dovuto condurla al di sotto, e sopra di essa fare il triangolo $BDC$, come mostra la *Fig.* 58. Che se in oltre fosse stato negativo il termine $\frac{2bxy}{a}$, la prima sostituzione sarebbe stata $y - \frac{bx}{a} = z$, e però $y = z + \frac{bx}{a}$. Adunque in questo supposto sì rispetto alla *Fig.* 57., come alla 58. il triangolo $BDC$ dovrà farsi al di sotto della $BH$, com'è $BdC$, quindi presa sopra $Bd$ prodotta una qualunque $Bf = x$, sarà $fP = y$, avvertendo però, che in

questo

questo caso l'angolo $BdC$ non dovrà farsi eguale al supplemento, ma allo stesso angolo, che devono fare le coordinate dell' equazione.

## ESEMPIO VII.

Sia $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = cx + ch$. Fatta la sostituzione $x + \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$, sarà $\frac{bbzz}{aa} = cx + ch$, e facendo $x + h = p$, sarà $zz = \frac{aacp}{bb}$, equazione alla parabola apolloniana. Sulla indefinita $AC$ si descriva il triangolo $APQ$ coi lati $AP = b$, $PQ = a$, e l'angolo $APQ$ eguale al supplemento dell' angolo, che devono fare le coordinate dell' equazione proposta (*Fig.* 59.), e si chiami al solito la nota $AQ = f$. Si producano $AP$, $AQ$ indefinitamente, e si prenda $AH = h$, e si conduca $HB$ parallela a $PQ$. Dal punto $B$ si tiri $BD$ indefinita e parallela ad $AP$, e col vertice $A$, al diametro $AC$, col parametro $= \frac{aac}{bf}$, e con le ordinate $CM$ parallele a $PQ$ si descriva la parabola $MAM$. Presa una qualunque $AE = p$, sarà $CM = z$, dunque $HE$, o sia $BD$, sarà $= x$, e $DC = \frac{ax}{b}$ (per i triangoli simili $APQ$, $BDC$) dunque $DM = z - \frac{ax}{b} = y$ positiva, e negativa, e le $BD$, $DM$ le coordinate dell' equazione proposta.

Se l'equazione fosse stata $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = cx - cb$, fatta la stessa prima sostituzione dell'equazione antecedente, si averebbe $\frac{bbzz}{aa} = cx - cb$, e ponendo $x - b = p$, $zz = \frac{aacp}{bb}$, che è la stessa di prima, nè vi è altra differenza, se non che nel primo caso si â $x = p - b$, ed in questo $x = p + b$; vale a dire, che in questo caso il vertice della parabola deve essere in $B$, e l'origine delle $x$ nel punto $A$ prese sull'indefinita $AE$.

## ESEMPIO VIII.

Sia $xx + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbyy}{aa} = cb - cx$. Fatta la sostituzione $x + \frac{by}{a} = \frac{bz}{a}$, sarà l'equazione $\frac{bbzz}{aa} = cb - cx$, e posta $b - x = p$, sarà $zz = \frac{aacp}{bb}$, equazione alla parabola.

Sulla indefinita $AH$ si descriva verso $H$ il triangolo $APQ$ coi lati $AP = b$, $PQ = a$, e l'angolo $APQ$ eguale al supplemento dell' angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta (*Fig.* 60.), e si chiami la nota $AQ = f$. Si produca $AP$, e si prenda $AE = b$, e s'abbassi $EH$ parallela a $PQ$; col vertice $H$ al diametro $HA$, con le ordinate $CD$ parallele a $PQ$, e col parametro $= \frac{aac}{bf}$ si de-

descriva la parabola apolloniana. Presa una qualunque $EB=p$, sarà $AB=b-p=x$, $BC=\frac{ax}{b}$, $CD=z$, dunque $BD=z-\frac{ax}{b}=y$ positiva, e negativa, prendendo $x$ tra i punti $A$ ed $O$, ed ambe le ordinate $y$ negative, prendendo $x$ oltre il punto $O$. Prodotta indefinitamente nella parte opposta al punto $E$ la retta $AE$, e presa una qualunque $Eb=p$ positiva maggiore di $AE$, sarà $Ab=b-p=x$, quantità negativa, onde in questo caso le $x$ negative saranno da $A$ verso $e$, e le positive di $A$ verso $E$, ed alla medesima $x$ negativa corrispondoranno due ordinate $bD$, $bD$ eguali ad $y$, positiva l'una, e negativa l'altra.

Se in questi due ultimi Esempj, siccome negl'altri, che verranno in appresso, il rettangolo delle due coordinate fosse affetto dal segno meno, vi si faccia sopra la considerazione, che si è fatta al fine dell'Esempio 6., il che basti d'avere una volta avvertito.

## ESEMPIO IX.

Sia $yy-\frac{2bxy}{a}+\frac{bbxx}{aa}=xx-aa$. Fatta la sostituzione di $y-\frac{bx}{a}=z$, sarà l'equazione $zz=xx-aa$ all'iperbola. Sulla indefinita $EE$ si descriva il triangolo $ACH$, e sia $AC=a$, $CH=b$, e l'angolo $ACH$ eguale al dato angolo delle coordinate dell'equazione proposta. Si produca in-

 defi-

definitamente $AC$ d'ambe le parti del punto $A$. Col centro $A$, col semidiametro trasverso $AH=f$, col conjugato $=a$ si descrivano le opposte iperbole con le ordinate parallele a $CH$ (*Fig. 61.*). Presa una qualunque $AB=x$ positiva, sarà $BE=\frac{bx}{a}$, ma $ED=z$, dunque $BD=z+\frac{bx}{a}=y$ positiva. Presa poi nell'iperbola l'ordinata $z$ negativa, cioè $=EM$, sarà allora $y$ eguale alla differenza tra $EB$, ed $EM$, cioè eguale a $BM$; e però negativa quando $x$ sia maggiore di $AO$. Adunque ad una qualunque assissa positiva maggiore di $AO$ corrisponderanno due ordinate, una positiva, negativa l'altra; ed ambe le ordinate saranno positive quando sia $x$ minore di $AO$. Ma quando si prenda la $x$ negativa, cioè dalla parte del punto $Q$; allora avvertasi, che sarà $QE$ negativa, imperciocchè sarà l'analogia $AC\ (a),\ CH\ (b) :: AQ\ (-x),\ QE=-\frac{bx}{a}$, adunque se $QE=-\frac{bx}{a}$, presa $z$ positiva $=ED$, sarà $z+\frac{bx}{a}=QD=y$ positiva, e presa $z$ negativa, sarà $-z-\frac{bx}{a}=QM=y$ negativa.

## ESEMPIO X.

Sia $yy-\frac{2bxy}{a}+\frac{gxx}{a}=hh$; aggiungendo $\frac{bbxx}{aa}$, sarà $yy-\frac{2bxy}{a}+\frac{bbxx}{aa}=hh-\frac{gxx}{a}+\frac{bbxx}{aa}$, e fatta la sostituzione

ne $y - \frac{bx}{a} = z$, sarà $zz = \frac{bbxx}{aa} - \frac{gxx}{a} + bb$, e ponendo $bb - ag = mm$, sarà $zz = \frac{mmxx}{aa} + bb$, cioè $zz - bb = \frac{mmxx}{aa}$, equazione all' iperbola.

Sulla indefinita $DD$ si descriva il triangolo $ABC$ coi lati $AB = a$, $BC = b$, e l'angolo $ABC$ eguale all'angolo, che devono fare le coordinate dell' equazione proposta (*Fig.* 62.), e sia $= f$ la nota $AC$. Per lo punto $A$ si conduca l'indefinita $PP$ parallela a $BC$; e col centro $A$, col diametro trasverso $QQ = 2b$, col conjugato $= \frac{2bf}{m}$ preso nella retta $EE$, ai vertici $Q$, $Q$ si descrivano le due opposte iperbole $HQH$; presa una qualunque $AD = x$, e condotta $DH$ parallela a $BC$, sarà $EH = z = AP$, e $DE = \frac{bx}{a}$; dunque $DH = z + \frac{bx}{a} = y$, e le $AD$, $DH$ saranno le coordinate dell' equazione proposta.

## ESEMPIO XI.

Sia $yy + \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = \frac{2bxx}{a} + bb$. Fatta la sostituzione di $y + \frac{bx}{a} = z$, sarà l'equazione $zz = \frac{2bxx}{a} + bb$, cioè $zz - bb = \frac{2bxx}{a}$, all' iperbola.

Sull' indefinita $AD$ si descriva il triangolo $AEP$, (*Fig.* 63.) e sia $AE = a$, $EP = b$, e l'angolo $AEP$ il sup-

ſupplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione propoſta. Prodotta d'ambe le parti indefinitamente la retta $AE$, e chiamata al ſolito la nota $AP=f$, ſi deſcrivano col centro $A$, col ſemidiametro traſverſo $AI=b$ parallelo a $PE$, e col parametro $=\frac{ff}{a}$ le oppoſte iperbole $IC$, $ic$; preſa una qualunque $AB=x$, ſarà $BD=\frac{bx}{a}$, ma $CD=FA=z$; dunque $BC=z-\frac{bx}{a}=y$. Preſa $z$ negativa $=DG$ ſarà $BG=-z+\frac{bx}{a}=-y$, e però alla ſteſſa $x$ poſitiva corriſponderanno due ordinate $y$, una poſitiva, l'altra negativa, preſa la $x$ fra il punto $A$, ed il punto $H$; preſa poi la $x$ fra i punti $H$, ed $L$, ſaranno ambe le ordinate $y$ negative, e di nuovo una poſitiva, e negativa l'altra, preſa la $x$ maggiore di $AL$.

Preſa poi la $Ab=-x$, ſarà $(bd)=-\frac{bx}{a}$, e però eſſendo $(dg)=z$, ſarà $(bg)=z-\frac{bx}{a}=y$, e preſa $z$ negativa $=(dc)$, ſarà $(bc)=-z+\frac{bx}{a}=-y$; adunque alla ſteſſa $Ab=x$ negativa corriſponderanno due ordinate $y$, una poſitiva, l'altra negativa, preſa la $x$ minore di $Ab$; ambe ſaranno le ordinate poſitive fra i punti $b$, ed $l$; e di nuovo un'ordinata ſarà poſitiva, e l'altra negativa, preſa la $x$ maggiore di $Al$; e però le iperbole così deſcritte ſaranno il luogo della propoſta equazione.

ESEM-

## ESEMPIO XII.

Sia $yy - \frac{2bxy}{a} + \frac{bbxx}{aa} = cc - xx + 2hx - hh$. Fatta la sostituzione $y - \frac{bx}{a} = z$, sarà $zz = cc - xx + 2hx - hh$, e fatta l'altra sostituzione $x - h = p$, sarà finalmente $zz = cc - pp$, equazione all'ellissi, e non al circolo, quantunque ne abbia l'apparenza, e la ragione si è, perchè non solo le coordinate $p$, $z$ non formano angolo retto, ma nè meno sono in angolo tra loro, dovendo l'una essere $AC$, l'altra $BT$, come si vede nella costruzione, che segue; e però sulla indefinita $EB$ si descriva il triangolo $EDF$ (*Fig.* 64.) coi lati $ED = a$, $DF = b$, e l'angolo $EDF$ eguale all'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, e si chiami $= f$ la nota $EF$. Si producano indefinitamente $ED$, $EF$, e presa $EP = h$, si conduca $PA$ indefinita, e parallela a $DF$, e dal punto $A$ la $AG$ parallela ad $EP$. Col centro $A$, col diametro trasverso $MN = \frac{2cf}{a}$, col diametro conjugato $RR$ parallelo a $DF$, ed $= 2c$ si descriva l'ellissi $MRNR$, presa una qualunque $AC = p$, sarà $EQ = x$, e però $BQ = \frac{bx}{a}$, ma $BT = z$, dunque $QT = z + \frac{bx}{a} = y$, e le $EQ$, $QT$ le coordinate dell'equazione proposta.

ESEM-

## ESEMPIO XIII.

Sia l'equazione $yy + \frac{bxy}{a} + xx + cy + lx - ag = 0$. Aggiunto all'uno, ed all'altro membro il quadrato $\frac{bbxx}{4aa}$, ſarà $yy + \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} = \frac{bbxx}{4aa} - xx - lx - cy + ag$, e fatta la ſoſtituzione $y + \frac{bx}{2a} = z$, ſarà $zz = \frac{bbxx - 4aaxx}{4aa} + \frac{bcx - 2alx}{2a} - cz + ag$.

Sia per eſempio $4aa$ maggiore di $bb$, e ſi ponga $\frac{bb - 4aa}{4aa} = -\frac{m}{n}$, e $\frac{bc - 2al}{2a} = h$, ſarà, aggiunto ad ambi i membri $\frac{cc}{4}$, $zz + cz + \frac{cc}{4} = -\frac{mxx}{n} + hx + ag + \frac{cc}{4}$, e fatta la ſoſtituzione $z + \frac{c}{2} = p$, ſarà $pp = -\frac{mxx}{n} + hx + ag + \frac{cc}{4}$, cioè $-\frac{npp}{m} + \overline{\frac{cc}{4} + ag} \times \frac{n}{m} = xx - \frac{nhx}{m}$, ed aggiunto all'uno ed all'altro membro $\frac{nnhh}{4mm}$, ſarà $-\frac{npp}{m} + \overline{\frac{cc}{4} + ag} \times \frac{n}{m} + \frac{nnhh}{4mm} = xx - \frac{nhx}{m} + \frac{nnhh}{4mm}$, e fatte finalmente le ſoſtituzioni di $x - \frac{nh}{2m} = q$, e di $\overline{\frac{cc}{4} + ag} \times \frac{n}{m} + \frac{nnhh}{4mm} = ee$, ſi avrà $\frac{npp}{m} = ee - qq$, equazione all'elliſſi.

Sulla indefinita $AC$ ſi deſcriva il triangolo $ASF$,

( *Fig.*

(*Fig.* 65.) e ſia $AS = 2a$, $SF = b$, e l'angolo $ASF$ eguale al ſupplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione propoſta, e ſi chiami $f$ la nota $AF$. Sulla $AS$ indefinitamente prodotta preſa $AR = \frac{bn}{2m}$, ſi tiri $RQ$ indefinita, e parallela ad $SF$, e dal punto $Q$ ſi tiri l'indefinita $QO$, e parallela ad $AS$, e ſi faccia $QM = \frac{1}{2}c$, e per lo punto $M$ condotta $HV$ parallela ad $AQ$, col centro $M$, col diametro traſverſo $HV = \frac{ef}{a}$, col parametro $= \frac{4aem}{fn}$ ſi deſcriva l'elliſſi $HNVK$; preſa una qualunque $RD = q$, ſarà $PN = p$, e però $AD = x$, $DC = \frac{bx}{2a}$, $CN = z$, dunque $DN = z - \frac{bx}{2a} = y$.

Quì ſi noti, che ſe l'angolo delle coordinate foſſe tale, che l'angolo $AFS$ diveniſſe retto, ed in conſeguenza l'angolo $MPN$ ancora, allora ſarebbe $4aa - bb = ff$, onde $\frac{m}{n} = \frac{4aa - bb}{4aa} = \frac{ff}{4aa}$, e però ſarebbe il parametro $\frac{4aem}{fn} = \frac{ef}{a}$, cioè eguale al diametro traſverſo; adunque eſſendo di più retto l'angolo $MPN$, l'elliſſi paſſerebbe ad eſſere un circolo del diametro $\frac{ef}{a}$.

131. Riſpetto alle equazioni dell'iperbole, che ſi vogliano, o ſi debbano coſtruire fra gli aſintoti, ſi conſiderino tutte compreſe nelle quattro ſeguenti:

$$\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny.$$

## ESEMPIO XIV.

Sia in primo luogo $\frac{gxx}{b} + xy = ab + mx + ny$, in cui prendo pure positivi tutti i termini dell'omogeneo di comparazione. Fatta la sostituzione $\frac{gx}{b} + y = z$, averassi $zx = mx + nz - \frac{ngx}{b} + ab$, e fatta l'altra sostituzione $z - m + \frac{ng}{b} = p$, sarà $px = np + mn + ab - \frac{nng}{b}$, e di nuovo fatta la terza sostituzione $x - n = q$, sarà finalmente $pq = ab + nm - \frac{nng}{b}$. Suppongo, che sia $ab + mn - \frac{nng}{b}$ quantità positiva. Sulla indefinita $NN$, al punto $A$ preso ad arbitrio si descriva il triangolo $ABC$ coi lati $AB = b$, $BC = g$, e l'angolo $ABC$ eguale al supplemento dell'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta; e si chiami la nota $AC = f$. Al punto $A$ si alzi $AD$ parallela a $BC$, ed $= m - \frac{ng}{b}$, come nella *Fig.* 66. quando sia $m - \frac{ng}{b}$ quantità

tità positiva; e si abbassi $AD$, come nella *Fig.* 67. quando sia $m - \frac{ng}{b}$ quantità negativa, a cagione della sostituzione fatta di $z - m + \frac{ng}{b} = p$. Per $D$ si conduca $PP$ indefinita, e parallela ad $AC$, e sulla $AB$ prodotta si prenda $AE = n$, e per $E$ si conduca $TT$ parallela a $BC$. Fra gli asintoti $PP$, $TT$ si descrivano le due opposte iperbole $RR$ del rettangolo costante $= \overline{ab + mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, cioè il quarto proporzionale di $AB$, di $AC$, e del rettangolo costante dell' equazione ridotta; presa una qualunque $EQ = q$, sarà $PM = \frac{fq}{b}$, e $PR = p$, e però $AQ = q + n = x$; ma $PN = AD = m - \frac{ng}{b}$, dunque $NR = p + m - \frac{ng}{b} = z$, e perchè $QN = \frac{gx}{b}$, sarà finalmente $QR = z - \frac{gx}{b} = y$, e le due $AQ$, $QR$ le coordinate dell'equazione proposta. Presa $x$ positiva, quando sia minore di $AE$, sarà $y$ negativa; quando sia maggiore di $AE$, e minore di $AO$, sarà $y$ positiva; e quando sia maggiore di $AO$, sarà $y$ negativa. Presa $x$ negativa, allora sarà $QN = -\frac{gx}{b}$ quantità negativa, adunque $y = z - \frac{gx}{b}$ sarà $= NR + NQ$; e però quando $x$ negativa sia minore di $AO$, sarà $y$ negativa; e quando essa sia maggiore di $AO$, sarà la $y$ positiva.

Ma se il secondo termine dell'omogeneo di compara-

 zione

zione fosse negativo, cioè se l'equazione fosse $\frac{gxx}{b} + xy = ab - mx + ny$, allora la seconda sostituzione sarebbe $z = p - m - \frac{ng}{b}$, e l'equazione ridotta $pq = ab - mn - \frac{nng}{b}$. Supposto adunque, che $ab - mn - \frac{nng}{b}$ sia quantità positiva, descritte come nella *Fig.* 67. le iperbole $RR$, ma del rettangolo costante $\overline{ab - mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, e presa $AD = m + \frac{ng}{b}$, saranno esse nello stesso modo il luogo dell' equazione proposta.

Se l'equazione proposta avesse l'ultimo termine affetto dal segno negativo; cioè se fosse $\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx - ny$, la terza sostituzione da farsi sarebbe $x + n = q$, dove che prima era $x - n = q$, e però muterassi la posizione del punto $A$, origine delle $x$. Adunque nella *Fig.* 68., se il valore di $AD$ è positivo, e nella *Fig.* 69., se è negativo, prodotto in $E$ il lato $BA$ del solito triangolo, onde sia $AE = n$, si descrivano fra gli asintoti $TT$, $PP$ le iperbole del loro competente rettangolo costante, cioè quando nell' equazione il termine $mx$ è affetto dal segno positivo, del rettangolo costante $= \overline{ab - mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, e quando per l'opposto è affetto dal segno negativo, del rettangolo costante $= \overline{ab + mn - \frac{nng}{b}} \times \frac{f}{b}$, e presa nel primo caso $AD = m + \frac{ng}{b}$,

e nel secondo $AD = \frac{ng}{b} - m$, saranno nello stesso modo il luogo dell'equazione proposta.

Fino ad ora ô supposto, che il rettangolo costante dell' equazione ridotta sia quantità positiva; ma quando fosse quantità negativa, non sarebbe dissimile la costruzione, avvertendo solo di descrivere le iperbole negli altri due angoli relativamente al rettangolo costante, che darà l'equazione ridotta, prendendo la linea $AD$ positiva, o negativa secondo il valore, che darà la stessa equazione, ed il punto $A$ alla sinistra, o alla destra dell' asintoto $TT$ conforme sarà positivo, o negativo l'ultimo termine $ny$ dell' omogeneo di comparazione, come mostrano le *Figure 66. 67. 68. e 69.*

Il termine costante $ab$ è stato preso fin' ora sempre positivo; ma quando anche si prenda negativo, nessuna alterazione può egli fare, se non rendere negativo il rettangolo costante delle equazioni ridotte, il qual caso già è stato costruito. Resta adunque generalmente costruita la prima delle quattro equazioni proposte, cioè $\frac{gxx}{b} + xy = ab \pm mx \pm ny$.

Quanto alla seconda equazione di sopra riferita $-\frac{gxx}{a} + xy = ab \pm mx \pm ny$; la prima sostituzione, che deve farsi, sarà $y - \frac{gx}{b} = z$, cioè $y = z + \frac{gx}{b}$, e tutto il rimanente si faccia, come si è fatto fin' ora.

Adun-

Adunque per avere l'ordinata $y$ bisognerà alle $z$ aggiungere la $\frac{gx}{b}$, onde in ciascun caso delle *Figure 66. 67. 68.* e *69.* si dovrà descrivere il triangolo $ABC$ al di sotto della $NN$, come si vede in $AbC$, coi lati $Ab=b$, $bC=g$, e con l'angolo $AbC$ eguale all'angolo, che devono fare le coordinate dell'equazione proposta, quindi prodotta dall'una, e dall'altra parte $Ab$, e presa una qualunque $Aq=x$, sarà la corrispondente $qR$ la $y$.

Le due ultime equazioni delle quattro sono

$$\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

$$-\frac{gxx}{b} - xy = ab \pm mx \pm ny,$$

ma mutando i segni saranno esse

$$-\frac{gxx}{b} + xy = -ab \mp mx \mp ny,$$

$\frac{gxx}{b} + xy = -ab \mp mx \mp ny$; ma questa è stata costruita nel costruire la prima, e l'altra è stata costruita nel costruire la seconda, e però generalmente sono state costruite le quattro equazioni da prima proposte; il che era da farsi.

PRO-

## PROBLEMA I.

132. *Data di posizione la retta indefinita* AB, (Fig. 70.) *e dato fuori di essa il punto* F; *si ricerca il luogo di tutti i punti* M *tali, che condotte da ciascuno di essi due rette linee, l'una perpendicolare alla* AB, *l'altra al dato punto* F, *sieno queste sempre eguali fra loro.*

Sia $M$ uno dei punti, che si cercano, e si tirino le rette, $MN$ perpendicolare a $BA$, ed $MF$ al dato punto $F$; dovranno essere queste eguali fra loro, per la condizione del problema, e però condotta $FG$ normale ad $AB$, e chiamata $= a$, si tiri ad essa perpendicolare $MP$, e si chiami $GP = x$, $PM = y$, sarà $PF = a - x$, e però $FM =$ $= \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, ma $FM = MN$; dunque $x =$ $= \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$, cioè $xx = xx - 2ax + aa + yy$, o sia $2ax - aa = yy$, e fatta la sostituzione $x - \frac{a}{2} = z$, sarà $2az = yy$, equazione alla parabola apolloniana.

Si prenda $GL$ eguale alla metà di $GF$, e col vertice $L$, col parametro $= 2a$ si descriva la parabola $LM$, sarà essa il luogo cercato, in cui presa una qualunque $LP = z$, sarà $PM = y$; ma $GL = \frac{1}{2}a$, dunque $GP = z + \frac{a}{2} = x$, e però le $GP$, $PM$ le coordinate dell'equazione proposta.

Già si sa, per la proprietà della parabola, che $AB$ è la direttrice, ed $F$ il fuoco.

PRO-

## PROBLEMA II.

133. *Data di posizione una retta linea indefinita* PAP, *e dati due punti fissi* A, D, *l'uno sulla stessa linea, e l'altro fuori di essa* (Fig. 71.), *si domanda il luogo di tutti i punti* M *tali, che condotte le linee* MA *al dato punto* A, *e* DME *dal dato punto* D *per lo punto* M, *sia sempre* AM *eguale alla porzione* ME *compresa fra il punto* M, *ed il punto* E, *in cui essa linea* DME *incontra la data linea* PAP.

Dal dato punto $D$, e dal punto $M$, che si suppone essere uno di quelli, che si cercano, si tirino le linee $DB$, $MP$ perpendicolari alla data $PAP$; saranno note le rette $AB$, $BD$, e però sia $AB = 2a$, $BD = 2b$, $AP = x$, $PM = y$. Si tirino le rette $AM$, $DME$; poichè per la condizione del problema $AM = ME$, sarà ancora $PE = AP = x$; ora per i triangoli simili $EBD$, $EPM$ sarà $EB, BD :: EP, PM$, e sostituendo i valori analitici, $2x - 2a, 2b :: x, y$; e però l'equazione $2xy - 2ay = 2bx$, cioè $xy - ay = bx$. Si faccia la sostituzione $x - a = z$, sarà $zy = bz + ba$, e trasportando il termine $bz$, $zy - bz = ab$, e fatta l'altra sostituzione $y - b = p$, sarà finalmente $pz = ab$, equazione all'iperbola fra gli asintoti.

Sulla data linea di posizione $PAP$ dal dato punto $A$ si prenda $AL = a$, e si erigga ad essa perpendicolare la $LC = b$; indi condotta per lo punto $C$ la retta $RF$ parallela

lela a $PP$; si descrivano fra gli asintoti $RF$, $HG$ le due opposte iperbole $DM$, $AM$ del rettangolo $ab$, le quali passeranno per i punti $D$, $A$; presa una qualunque $CK=z$, sarà $KM=p$, ma $AL=a$, $LC=b$; dunque $AP=a+z=x$, e $PM=p+b=y$ saranno le coordinate del problema, e le iperbole il luogo, che si cercava; il che ec.

## PROBLEMA III.

134. *Dati due circoli* EGF, BNO, *e dati i loro centri* C, A; (Fig. 72.) *se da un qualunque punto* G *della periferìa del circolo* EGF *si tirerà una tangente* GNO, *che incontri ne' puuti* N, O *l'altro circolo* BNO, *e da questi due punti si condurranno due tangenti* NM, OM, *si ricerca il luogo di tutti i punti* M, *ne' quali le dette tangenti s' incontrano.*

Dal punto $M$, che è uno di quelli, che si cercano, si tiri la perpendicolare $MP$ alla $CA$, e dal centro $A$ si tiri la retta $AM$; poichè i triangoli $ANM$, $AOM$ sono eguali, per essere retti gli angoli $N$, $O$, ed i lati $AN$, $NM$ eguali ai lati $AO$, $OM$; sarà anche l'angolo $NMA=OMA$, onde nei triangoli $NMQ$, $OMQ$, poichè è comune il lato $MQ$, ed $MO=MN$, sarà $NQ=QO$, ed $AM$ perpendicolare alla $NO$. Si tiri dal centro $C$ al punto del contatto la retta $CG$, la quale sarà parallela ad $AM$, essendo anch'essa perpendicolare alla $NO$; e si chiami $AB=a$, $CE=b$, $CA=c$, ed $AP=x$, $PM=y$,

e però $AM = \sqrt{xx + yy}$. Nei triangoli simili $AOM$, $AQO$ sarà $AM, AO :: AO, AQ$, e sostituiti i valori analitici, si troverà $AQ = \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$. Si conduca $CH$ perpendicolare ad $MA$ prodotta, se farà bisogno, sarà $HQ = CG$, e però $HA = b - \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}$; ma saranno simili i triangoli $CAH$, $AMP$, dunque $PA, AM :: AH, AC$, cioè $x, \sqrt{xx + yy} :: b - \frac{aa}{\sqrt{xx + yy}}, c$, e moltiplicati gli estremi, ed i mezzi, $cx = b\sqrt{xx + yy} - aa$, ovvero $cx + aa = b\sqrt{xx + yy}$, e quadrando, $ccxx + 2aacx + a^4 = bbxx + bbyy$, cioè $yy + \frac{bb - cc}{bb} \times xx - \frac{2aacx}{bb} - \frac{a^4}{bb} = 0$.

Tre casi in quest'equazione debbono distinguersi, cioè quando $b = c$; quando $b$ è maggiore di $c$; e quando $c$ è maggiore di $b$.

Sia primieramente $b = c$, sarà l'equazione $yy - \frac{2aax}{b} - \frac{a^4}{bb} = 0$. Si lasci solo da una parte il termine $yy$, e sarà $yy = \frac{2aax}{b} + \frac{a^4}{bb}$, e ritrovato un rettangolo $2bf = aa$, si ponga in luogo di $aa$ nell'ultimo termine del secondo membro, sarà $yy = \frac{2aax + 2aaf}{b}$, e fatta la sostituzione $x + f = z$, sarà finalmente $yy = \frac{2aaz}{b}$, equazio-

zione alla parabola apolloniana. Sulla retta $CA$ ( *Fig.* 73. ) verſo $C$ ſi prenda $AI = \frac{aa}{2b} = f$, e col vertice $I$, aſſe $IL$, parametro $= \frac{2aa}{b}$ ſi deſcriva la parabola $IM$; ſarà eſſa il luogo cercato, in cui preſa una qualunque $IP = z$, ſarà $PM = y$, ma $AI = f$, dunque $AP = z - f = x$, e le $AP$, $PM$ le coordinate del Problema.

Sia in ſecondo luogo $b$ maggiore di $c$, ſarà poſitivo il termine $\frac{\overline{bb - cc} \times xx}{bb}$; ſi ſcriva l' equazione così $\frac{\overline{bb - cc} \times xx}{bb} - \frac{2aacx}{bb} = \frac{a^4}{bb} - yy$, ovvero $xx - \frac{2aacx}{bb - cc} = \frac{a^4}{bb - cc} - \frac{bbyy}{bb - cc}$, ed aggiunto ad ambi i membri il quadrato $\frac{a^4cc}{\overline{bb - cc}^2}$, ſarà $xx - \frac{2aacx}{bb - cc} + \frac{a^4cc}{\overline{bb - cc}^2} = \frac{a^4bb}{\overline{bb - cc}^2} - \frac{bbyy}{bb - cc}$, e fatta la ſoſtituzione $x - \frac{aac}{bb - cc} = z$, ſarà finalmente $\frac{bbyy}{bb - cc} = \frac{a^4bb}{\overline{bb - cc}^2} - zz$, equazione all' elliſſi.

Si prenda ( *Fig.* 74. ) dal punto $A$ verſo $E$ la porzione $AI = \frac{aac}{bb - cc}$, e col centro $I$, coll' aſſe traſverſo $ZY = \frac{2aab}{bb - cc}$, col conjugato $RT = \frac{2aa}{\sqrt{bb - cc}}$ ſi deſcriva l' elliſſi $RZTY$, ſarà eſſa il luogo cercato, in cui preſa una qualun-

 que

que $IP = -z$ (perchè dalla parte de' negativi), farà $PM = y$; ma $AI = \frac{aac}{bb - cc}$, dunque $AP = z + \frac{aac}{bb - cc} = x$, e però le $AP$, $PM$ le coordinate del Problema, il che ec.

Sia finalmente $c$ maggiore di $b$, farà negativa la quantità $\frac{\overline{bb - cc} \times xx}{bb}$, e però l'equazione $\frac{ccxx - bbxx}{bb} + \frac{2aacx}{bb} = yy - \frac{a^4}{bb}$, ovvero $xx + \frac{2aacx}{cc - bb} = \frac{bbyy}{cc - bb} - \frac{a^4}{cc - bb}$. Si aggiunga ad ambi i membri il quadrato $\frac{a^4 cc}{\overline{cc - bb}^2}$, e farà $xx + \frac{2aacx}{cc - bb} + \frac{a^4 cc}{\overline{cc - bb}^2} = \frac{bbyy}{cc - bb} + \frac{a^4 bb}{\overline{cc - bb}^2}$, e fatta la sostituzione $z = x + \frac{aac}{cc - bb}$, farà finalmente $zz - \frac{a^4 bb}{\overline{cc - bb}^2} = \frac{bbyy}{cc - bb}$, equazione all'iperbola riferita agl' assi.

Sulla retta $CA$ (*Fig.* 75.) si prenda dalla parte del punto $C$ la porzione $AI = \frac{aac}{cc - bb}$, e col centro $I$, coll'asse trasverso $ZY = \frac{2aab}{cc - bb}$, col conjugato $= \frac{2aa}{\sqrt{cc - bb}}$ si descrivano le iperbole opposte $YM$, $ZK$; faranno esse il luogo cercato, in cui presa una qualunque $IP = z$, farà $PM = y$; ma $AI = \frac{aac}{cc - bb}$, dunque $AP = z - \frac{aac}{cc - bb} = x$, e però le $AP$, $PM$ le coordinate del problema proposto, il che ec.

In

In queſto Problema ſi è ſempre ſuppoſto il circolo $EFG$ maggiore del circolo $BNO$, cioè $b$ maggiore di $a$, ma quando anche foſſe $b=a$, ovvero $a$ maggiore di $b$, il luogo dei punti cercati ſarebbe ſempre nel primo caſo la parabola, nel ſecondo l'elliſſi, e nel terzo le due oppoſte iperbole, e perciò era inutile il diſtinguere queſti caſi, i quali non fanno variare i luoghi.

## PROBLEMA IV.

135. *Date due linee* AC, CB *di poſizione ſulla retta* AB, *che ſi taglino in* C (Fig. 76. 77.), *ſi ricerca il luogo di tutti i punti* M *tali*, *che condotta per eſſi una perpendicolare* PMN *ad* AB, *che tagli nel punto* Q *la* AC, *e nel punto* N *la* BC, *ſia ſempre il quadrato di* PM *eguale al rettangolo di* PQ×PN.

Si tiri la retta $CD$; queſta o caderà fra i punti $A$, $B$, come nella *Figura* 76., o caderà da una parte di eſſi, come nella *Figura* 77.

Cada in primo luogo fra i punti $A$, $B$, e ſi chiami $AB=a$, $AP=u$, $PQ=x$, $PM=y$, $PN=z$, ſarà, per la condizione del problema, $zx=yy$. Ma è data la ragione di $AP$ a $PQ$, che ſia, per eſempio, quella di $m$ ad $n$, ed è data la ragione di $BP$, a $PN$, che ſia, per eſempio, come $b$, $c$; dunque ſarà $PQ=x=\frac{un}{m}$, e $PN=z=\frac{ac-cu}{b}$, e però ſoſtituiti queſti valori nell' equazione $zx=yy$, ſarà

$yy=$

$yy = \frac{ac - cu}{b} \times \frac{un}{m}$, cioè $\frac{bmyy}{cn} = au - uu$, equazione all'elliffi. Coll' affe trafverfo $AB = a$, col conjugato $= a\sqrt{\frac{cn}{bm}}$ fi defcriva l'elliffi $AMB$, farà la metà fuperiore $AMCB$ il luogo, che fi cerca.

Cada ora (*Fig.* 77.) il punto $D$ da una parte dei punti $A$, $B$, e chiamata, come fopra, $AB = a$, $AP = u$, $PM = y$, $PQ = x$, $PN = z$, farà $BP = u - a$, e però $PN = \frac{uc - ac}{b}$; ma, per la condizione del problema, $zy = yy$, e la $x = \frac{un}{m}$, come fopra, dunque fatta la foſtituzione dei valori di $z$, ed $x$, farà $yy = \frac{uc - ac}{b} \times \frac{un}{m}$, o fia $\frac{bmyy}{cn} = uu - au$, equazione all' iperbola.

Al vertice $B$, affe trafverfo $= a$, affe conjugato $= a\sqrt{\frac{cn}{bm}}$ fi defcriva l'iperbola $BCM$, farà effa il luogo, che fi cercava.

Se la retta $AC$ non cadeffe fopra la $AB$, ma foffe a lei parallela, come farebbe nella pofizione $aC$, $AB$, (*Fig.* 78.) farebbe data la retta $PQ$, e però chiamata $PQ = m$, $AB = a$, $BP = u$, $PN = z$, $PM = y$, e fatta la ragione di $BP$, $PN :: m, n$, l'equazione $xz = yy$ farebbe $yy = un$; onde defcritta al vertice $B$, affe $BA$, col parametro $= n$ la parabola apolloniana $BMC$, farà effa in queſto cafo il luogo, che fi cerca.

PRO-

## PROBLEMA V.

136. *Sia una curva* AM (Fig. 79.), *di cui ſia data l'equazione, ed abbia per aſſe la retta* AT, *e ſia fuori di eſſa un punto fiſſo* F, *da cui ſia condotta la retta* FM, *che tagli la curva nel punto* M, *e l'aſſe nel punto* P. *Movendoſi la retta* FM *intorno al punto* F *faccia movere tutto il piano* AMP *parallelo a ſe ſteſſo ſulla linea* ET, *eſſendo fiſſo il punto* P *riſpetto al punto* A, *ma mobile ſull' aſſe* TA, *cioè eſſendo data* AP; *deſcriverà nello ſteſſo tempo il punto* M *una curva* CMD: *ſi cerca, quale ſia queſta curva.*

Sia giunta la curva ſul punto $a$ della retta $ET$, ſarà per la condizione del problema $Pp = Aa$, e però $AP = (ap)$. Si chiami adunque $AP = a$, $FT = b$, ed abbaſſata dal punto $M$ la perpendicolare $MQ$ ad $ET$; ſia $TQ = x$, $QM = y$, $AQ = t$. Poichè per i triangoli ſimili $FOM$, $PMQ$ ſi â $FO$, $OM$ :: $QM$, $PQ$, cioè $b+y$, $x$ :: $y$, $\frac{xy}{b+y}$, ſarà $\frac{xy}{b+y} = PQ$, ma $PQ = a-t$, dunque $\frac{xy}{b+y} = a-t$, cioè $xy = ab - bt + ay - ty$.

Si ſoſtituiſca in queſt' equazione canonica il valore di $t$ dato per la $y$, e per le cognite dell' equazione della curva $AM$, e ſi avrà l'equazione, che ſi cerca della curva $CMD$.

Sia

Sia primieramente $AM$ una retta linea (*Fig.* 80.); farà data la ragione di $t$ ad $y$, che fia, per efempio, come $m$ ad $n$, farà $t = \frac{my}{n}$, e foftituito quefto valore in luogo di $t$ nell' equazione canonica, farà effa $\frac{myy}{n} = ab - xy - \frac{bmy}{n} + ay$, luogo all' iperbola fra gli afintoti.

Per coftruirla nella data *Figura* fi prenda fulla $FO$ una qualunque porzione $TH$, e condotta in angolo retto la $HG$ tale, che fia $TH, HG :: n, m$; fi tiri la $TG$, e prefa fulla $TA$ la porzione $TV = \frac{an - bm}{n}$, dal punto $V$ fi tiri $VS$ parallela a $TG$, e fra gli afintoti $VS$, $VE$ fi defcriva l'iperbola $CMD$ del rettangolo coftante $= \frac{abg}{n}$; (fatta $= g$ la nota $TG$) prefa una qualunque affiffa $TQ = x$, farà la corrifpondente $QM = y$, e l'iperbola il luogo dell' equazione $\frac{myy}{n}$, il che ec.

Sia in fecondo luogo $AM$ un circolo (*Fig.* 81.) defcritto col centro $P$, raggio $AP = a$, farà per la proprietà del circolo $AQ = t = a - \sqrt{aa - yy}$, e foftituito nell' equazione generale in luogo di $t$ quefto valore, farà effa $\overline{xy = b + y}\sqrt{aa - yy}$, equazione alla Concoide di Nicomede, e farà la curva $CMD$, che fi defcrive dall' interfezione $M$ della retta $FM$ coll' arco fuperiore $AM$ del circolo, la concoide fuperiore, $ET$ ne farà l'afintoto, $F$ il polo;

polo; e la curva, che si genera dall'interfezione $N$ della retta $FM$ col circolo al di sotto di $ET$, sarà la concoide inferiore. Il che manifestamente si vede dalla natura della concoide, e dalla condizione del problema; imperciocchè saranno sempre le due intercette $PM$, $PN$ fra l'asintoto, e la curva eguali al raggio del circolo $AP$.

Sia in terzo luogo la curva $AM$ una parabola apolloniana del parametro $AP = a$; (*Fig.* 82.) sarà in quest'ipotesi $t = \frac{yy}{m}$, e sostituito nell'equazione canonica questo valore di $t$, sarà essa

$$xy - ay + \frac{y^3}{m} = ab - \frac{byy}{m},$$

cioè

$$y^3 + mxy + byy - amy - abm = 0.$$

Che è l'equazione alle due Concoidi Paraboliche, una delle quali si descrive per l'interfezione della linea $FM$ colla parte superiore della parabola; l'altra per l'interfezione colla parte inferiore, e la retta $ET$ sarà anche in questo caso l'asintoto della curva.

## PROBLEMA VI.

137. *Dati due circoli eguali, che si taglino in due punti* A, N; (Fig. 83.) *e dati i loro centri* D, B, *si ricerca il luogo di tutti i punti* M *tali, che le loro distanze dai detti circoli sieno sempre eguali fra loro.*

Sia $M$ uno dei punti, che si cercano; condotte dai centri $D$, $B$ per questo punto le rette $DM$, $BO$, saranno $MS$, $MO$ le distanze dai circoli dati, le quali per la condizione del problema devono essere fra loro eguali. Si chiami adunque $DS = BO = a$, $DB = b$, ed abbassata la perpendicolare $MP$ alla retta $DB$ prodotta, sia $DP = x$, $PM = y$, sarà $DM = \sqrt{xx + yy}$, ed $SM = \sqrt{xx + yy} - a$, ma $BP = x - b$, dunque $BM = \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, e però $OM = a - \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, ma deve essere $SM = MO$, dunque si avrà l'equazione $\sqrt{xx + yy} - a = a - \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, la quale si riduce ad essere (coi metodi insegnati) $xx - bx + \frac{bb}{4} = aa - \frac{4aayy}{4aa - bb}$, si faccia la sostituzione $x - \frac{b}{2} = z$, e sarà $zz = aa - \frac{4aayy}{4aa - bb}$, o sia $\frac{4aayy}{4aa - bb} = aa - zz$, equazione all'ellissi.

Si divida per metà nel punto $C$ la retta $DB$, e col centro $C$, coll'asse trasverso $FE = 2a$, col conjugato $AN = \sqrt{4aa - bb}$ si descriva l'ellissi $FAEN$, sarà essa il luogo cercato, in cui presa una qualunque $CP = z$, sarà $PM = y$, ma $CD = \frac{1}{2}b$, dunque $DP = z + \frac{1}{2}b = x$, e però le $DP$, $PM$ le coordinate del problema proposto.

E' inutile il distinguere i casi, ne' quali $a$ è maggiore, minore, o eguale a $b$, perchè il problema non muta natura, essendo sempre necessariamente $b$ minore di $2a$, come è chiaro.

Dalla

Dalla coſtruzione ſi ricava, che i punti $D$, $B$ ſaranno i fuochi dell'elliſſi, e che il di lei aſſe conjugato ſarà terminato dai punti, ne' quali ſi tagliano i due circoli. E primieramente, perchè $DS$ è eguale a $BO$, ed $SM = MO$, ſarà $DS + SM + MB$, cioè $DM + MB = 2DS$, ma $2DS = FE$, dunque per la nota proprietà dell'elliſſi ſaranno i punti $B$, $D$ i di lei fuochi. Ciò ſuppoſto, per un' altra proprietà dell' elliſſi riguardo ai fuochi, intendendo condotte le $BA$, $BN$, ſarà $BN = BA = CE$, ma queſto ſi verifica nei punti, nei quali ſi tagliano i due circoli dati, perchè $D$, $B$ ſono i loro centri, e $CE$ per la coſtruzione è eguale al ſemidiametro degli ſteſſi circoli, dunque l'elliſſi paſſerà per i detti punti d'interſezione dei circoli dati, il che ec.

## PROBLEMA VII.

138. *Data la retta linea* AB (Fig. 84.), *ritrovare il luogo de' punti* D *tali, che nella prodotta* DA *preſa* AC *metà di* AD, *e condotta al punto* B *la retta* CB, *ſia* CB=CD.

Si abbaſſi dal punto $D$, che ſi ſuppone eſſere uno di quelli, che ſi cercano, la normale $DP$ alla $AB$. E ſi chiami $AB = a$, $AP = x$, $PD = y$, ſarà $AD = \sqrt{xx + yy}$, ed $AC$ per la condizione del problema $= \frac{1}{2}\sqrt{xx + yy}$, e però $CD = CB = \frac{3}{2}\sqrt{xx + yy}$; ſi tiri dal punto $C$ la per-

 pen-

pendicolare $CQ$ alla $BA$ prodotta; poichè ne' triangoli simili $AQC$, $APD$ è $AD=2AC$, farà $AP=2AQ$, e $PD=2QC$, onde $CQ=\frac{1}{2}y$, ed $AQ=\frac{1}{2}x$, e però $BQ=a+\frac{1}{2}x$; ora $\overline{CB}^2=\overline{CQ}^2+\overline{BQ}^2=aa+ax+\frac{xx}{4}+\frac{yy}{4}$, ma $\overline{CB}^2=\overline{CD}^2=\frac{9}{4}\times\overline{xx+yy}$, dunque farà l'equazione $\frac{9xx}{4}+\frac{9yy}{4}=aa+ax+\frac{xx}{4}+\frac{yy}{4}$, che si riduce ad essere $xx-\frac{ax}{2}=\frac{aa-yy}{2}$, ed aggiunto ad ambi i membri il quadrato $\frac{aa}{16}$, e fatta la sostituzione $x-\frac{a}{4}=z$, farà finalmente $zz=\frac{9aa}{16}-yy$, equazione al circolo.

Si prenda adunque $BM=\frac{3a}{4}$, e col centro $M$, col raggio $BM$ si descriva il circolo $NDB$, farà esso il luogo, che si cercava, in cui presa una qualunque $MP=z$, farà $PD=y$, ma $AM=\frac{1}{4}a$, dunque $AP=z+\frac{1}{4}a=x$, e le $AP$, $PD$ le coordinate del problema proposto.

Se si volesse anche il luogo de' punti $C$, questo farebbe un'altro problema di simile natura, che si scioglierebbe nella seguente maniera.

Si chiami $AQ=p$, $QC=q$ normale a $BN$, farà $AP=2p$, $PD=2q$, ma $AM=\frac{a}{4}$, ed $MB=\frac{3a}{4}$, dunque $NA=\frac{a}{2}$, e però $NP\times PB=\frac{aa}{2}+ap-4pp$, ma per la

pro-

proprietà del circolo $NP \times PB = \overline{PD}^2 = 4qq$, dunque farà $4qq = \frac{aa}{2} + ap - 4pp$, quindi $\frac{aa}{8} - qq = pp - \frac{ap}{4}$, si aggiunga ad ambi i membri il quadrato $\frac{aa}{64}$, e fatta la sostituzione $p - \frac{a}{8} = t$, farà $qq = \frac{9aa}{64} - tt$, onde descritto col diametro $MN = \frac{3a}{4}$ il semicircolo $NCM$, farà esso il luogo di tutti i punti $C$, in cui presa dal centro $S$ una qualunque $SQ = t$, farà $QC = q$, ma $AS = \frac{a}{8}$, per la costruzione, dunque $AQ = t + \frac{a}{8} = p$, e le $AQ$, $QC$ le coordinate del problema.

Questi due Problemi si potranno dimostrare unitamente in forma di Teorema nel seguente modo.

Se nella data $AB$ si prenderà $MB$ eguale a tre quarti di $AB$, e col centro $M$, col raggio $MB$ si descriverà il circolo $NDB$, ed in oltre col diametro $MN$ il circolo $NCM$, condotta per lo punto $A$, comunque si voglia, la retta linea $CD$ terminata alla periferia dell'uno, e dell'altro circolo, e dal punto $C$ la retta $CB$ all'estremità del diametro, farà sempre $DA$ doppia di $AC$, e $CD$ eguale a $CB$.

Sia $S$ il centro del circolo $NCM$, e si conducano le rette $SC$, $DL$ per i centri $S$, $M$. Poichè $SM$ è la metà di $MB$, farà $SM$ tre ottavi di $AB$; ma $AM$ ne è un quar-

quarto, dunque $SA$ farà un'ottavo di $AB$, e però la metà di $AM$; ma è pure $SC$ la metà di $DM$, e l'angolo $SAC$ eguale all'angolo $DAM$, dunque è facile da vederfi, che farà il triangolo $SAC$ fimile al triangolo $DAM$, e farà però anche $AC$ la metà di $AD$, che era il primo.

Ma fe fono fimili i triangoli $SAC$, $ADM$, farà anche l'angolo $SCA$ eguale all'angolo $ADM$, onde faranno parallele le rette linee $SC$, $DL$, ed in confeguenza fimili i triangoli $BLM$, $BCS$, e però farà $ML$ la quarta proporzionale di $BS$, $SC$, ed $MB$; ma $BS = \frac{9}{8} AB$, $SC = \frac{3}{8} AB$, $MB = \frac{6}{8} AB$, dunque $ML = \frac{2}{8} AB = AM$, ma $MD = MB$, e l'angolo $AMD = LMB$, dunque fono eguali i triangoli $AMD$, $BML$, e l'angolo $ADM = MBL$; ma è anche l'angolo $MDB$ eguale all'angolo $MBD$, dunque l'angolo $CDB$ è eguale all'angolo $CBD$, e però il lato $CB$ eguale al lato $CD$, che era il fecondo.

## PROBLEMA VIII.

139. *Dati i due lati* AC, CB *della norma* ACB, (Fig. 85.) *fi ricerca il luogo di tutti i punti, per i quali paffa l'eftremità* B *del lato* CB *mentre la norma fi move talmente, che il punto* A *fia fempre fulla linea* DM, *ed il punto* C *fulla linea* DP, *che fi fuppone perpendicolare alla* DM.

Dal

Dal punto $B$ si abbassi $BP$ normale a $DP$, e sia $DP = x$, $PB = y$, $AC = a$, $CB = b$; sarà $CP = \sqrt{bb - yy}$, $DC = x - \sqrt{bb - yy}$. Ma gli angoli $DCA$, $BCP$ presi assieme sono eguali ad un retto, siccome gli angoli $BCP$, $CBP$, e però eguali fra loro gli angoli $DCA$, $CBP$; dunque saranno simili i triangoli $ADC$, $BCP$, e sarà $AC, CD :: BC, BP$, cioè $a, x - \sqrt{bb - yy} :: b, y$; e però $ay = bx - b\sqrt{bb - yy}$, e quadrando, ed ordinando i termini, sarà l'equazione $xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb} = bb - yy$. Si faccia la sostituzione $x - \frac{ay}{b} = z$, ed averassi l'equazione $zz = bb - yy$ all'ellissi.

Sull'indefinita $DM$ si descriva il triangolo $DEH$ coi lati $DE = b$, $EH = a$, e l'angolo $DEH$ retto, giacchè è retto l'angolo delle coordinate del Problema, e sia $= f$ la nota $DH$. Col semidiametro trasverso $DH = f$, col semidiametro conjugato $DQ = b$, e parallelo ad $EH$ si descriva l'ellissi $HBQ$, essa sarà il luogo ricercato, in cui presa una qualunque $DF = PB = y$, sarà $GB = z$, $FG = \frac{ay}{b}$, dunque $FB = z + \frac{ay}{b} = x = DP$; e però le $DP$, $PB$ le coordinate del Problema.

PRO-

## PROBLEMA IX.

140. *Dato l'angolo* BAP, *e dato il punto* P; (Fig. 86.) *si ricerca il luogo di tutti i punti* D *tali, che condotte le due rette*, BD *parallela ad* AP, *e* DP *al dato punto* P, *sia sempre* BD *a* DP *nella data ragione di* d *ad* e.

Condotta $DC$ parallela ad $AB$, si chiami $AP = a$, $AC = x$, $CD = y$, $CP = a - x$. Poichè l'angolo $BAP$, o sia $DCE$ è dato, condotta $DE$ normale ad $AP$; sarà data la ragione di $CD$ alla $CE$, e però sia $CD, CE :: d, b$. Sarà adunque $CE = \frac{by}{d}$, $AE = x + \frac{by}{d}$, $EP = a - x - \frac{by}{d}$, o pure $= x + \frac{by}{d} - a$, $PD = \frac{ex}{d}$. Adunque sarà $\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2 = \overline{DP}^2 - \overline{PE}^2$, cioè $yy = \frac{eexx}{dd} - aa - xx + 2ax + \frac{2aby}{d} - \frac{2bxy}{d}$, o sia $yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{\overline{ee + bb - dd}}{dd} \times xx + 2ax - aa + \frac{2aby}{d}$, ( aggiungendo all'uno, ed all'altro membro la quantità $\frac{bbxx}{dd}$). Ma quì si osservi, che la quantità $ee + bb - dd$ può essere eguale, maggiore, o minore del zero; e però sia in primo luogo eguale al zero, adunque sarà l'equazione $yy + \frac{2bxy}{d} + \frac{bbxx}{dd} = \frac{2aby}{d} + 2ax - aa$, e facendo

la

la ſoſtituzione $y+\frac{bx}{d}=z$, ſarà $zz-\frac{2abz}{d}=2ax-\frac{2abbx}{dd}-aa$, ed aggiunto ad ambe le parti $\frac{aabb}{dd}$, $zz-\frac{2abz}{d}+\frac{aabb}{dd}=2ax-\frac{2abbx}{dd}+\frac{aabb-aadd}{dd}$, e facendo la ſoſtituzione $z-\frac{ab}{d}=p$, ſarà $pp=\frac{2addx-2abbx+aabb-aadd}{dd}$, cioè $pp=\overline{x-\frac{a}{2}}\times\frac{2add-2abb}{dd}$, e fatto $x-\frac{a}{2}=q$, ſarà $pp=q\times\frac{2add-2abb}{dd}$. Parabola Apolloniana.

Sia (*Fig.* 87.) $BAP$ il dato angolo, $AP$ la data $=a$. Sulla $AP$ indefinitamente prodotta ſi deſcriva il triangolo $AMN$ con l'angolo $AMN=BAP$; e ſia $AM$, $MN::d$, $b$. Si produca $AN$ indefinitamente, e nella $AB$ ſia $AH=\frac{ab}{d}$, e ſi conduca $HE$ indefinita, e parallela ad $AN$. Si divida $AP$ per metà in $O$, e condotta $OQ$ parallela ad $AB$, col vertice $Q$, al diametro $QE$, col parametro $=\frac{2add-2abb}{df}$, (fatta $f=AN$) e con le ordinate parallele ad $AB$ ſi deſcriva la parabola $QD$; preſa una qualunque $AV=x$, ſarà $VD=y$, ed eſſa parabola il luogo cercato.

Sia in ſecondo luogo $ee+bb-dd$ maggiore del zero, cioè quantità poſitiva. Ripreſa adunque l'equazio-

ne, e fatta $ee + bb - dd = hh$, farà $yy + \frac{2hxy}{d} + \frac{hhxx}{dd} = \frac{hhxx}{dd} - aa + 2ax + \frac{2aby}{d}$, e fatta la ſteſſa ſoſtituzione di $y + \frac{hx}{d} = z$, farà $zz - \frac{2abz}{d} = \frac{hhxx}{dd} - aa + 2ax - \frac{2abhx}{dd}$, ed aggiunto $\frac{aabb}{dd}$, e fatta la ſoſtituzione $z - \frac{ab}{d} = p$, $ddpp = hhxx + 2addx - 2abhx - aadd + aabb$, cioè $xx + \frac{2addx - 2abhx}{hh} = \frac{ddpp}{hh} + \frac{aadd - aabb}{hh}$. Si faccia $\frac{add - abh}{hh} = m$, farà $xx + 2mx = \frac{ddpp}{hh} + am$, ed aggiungendo all'uno ed all'altro membro $mm$, $xx + 2mx + mm = \frac{ddpp}{hh} + am + mm$, e fatto $x + m = q$, farà finalmente $qq = \frac{ddpp}{hh} + am + mm$, cioè $qq - am - mm = \frac{ddpp}{hh}$, equazione all'iperbola.

Sia $BAP$ (*Fig.* 88.) il dato angolo, $AP$ la data $= a$, ſulla $AP$ indefinitamente prodotta ſi deſcriva il triangolo $AMN$ coll'angolo $AMN = BAP$; e ſia $AM$ ad $MN :: d, b$. Si produca indefinitamente $AN$, e nella $AB$ ſi prenda $AH = \frac{ab}{d}$, e per lo punto $H$ ſi tiri l'indefinita $OE$ parallela ad $AN$; indi ſi faccia $AK = m$, e ſi tiri $KO$ parallela ad $AH$; ed al centro $O$, col ſemidiametro traſverſo $OQ = f\sqrt{\frac{am + mm}{d}}$, col ſemidiametro con-

juga-

jugato $=\frac{b\sqrt{am+mm}}{d}$, e parallelo ad $AB$ ( intendendo per $f$ la nota $AN$) si descriva l'iperbola $QD$; presa una qualunque $AV=x$, sarà $VD=y$, ed essa iperbola il luogo ricercato.

Sia finalmente $ee+bb-dd$ minore del zero, cioè nagativa; si faccia adunque $ee+bb-dd=-hh$, e fatto $y+\frac{bx}{d}=z$, l'equazione sarà $zz-\frac{2abz}{d}=-\frac{hhxx}{dd}-aa+2ax-\frac{2abbx}{dd}$, ed aggiungendo $\frac{aabb}{dd}$, $zz-\frac{2abz}{d}+\frac{aabb}{dd}=-\frac{hhxx}{dd}+\frac{2addx-2abbx}{dd}+\frac{aabb-aadd}{dd}$, e fatta la sostituzione $z-\frac{ab}{d}=p$, $ddpp=-hhxx+2addx-2abbx+aabb-aadd$, cioè $xx-\frac{2addx+2abbx}{hh}=\frac{aabb-aadd}{hh}-\frac{ddpp}{hh}$. Si faccia $\frac{add-abb}{hh}=m$, avremo $xx-2mx=-am-\frac{ddpp}{hh}$, ed aggiunto $mm$, $xx-2mx+mm=mm-am-\frac{ddpp}{hh}$; e fatta finalmente la sostituzione $x-m=q$, sarà $\frac{ddpp}{hh}=mm-am-qq$, equazione all'ellissi.

Sia ( *Fig.* 89. ) $BAP$ il dato angolo, ed $AP$ la data $=a$. Sulla $AP$ indefinitamente prodotta si descriva il triangolo $AMN$ coll'angolo $AMN=BAP$, e sia $AM$ ad $MN$ :: $d$, $b$; si produca $AN$ indefinitamente, e nella

$AB$ si prenda $AH = \frac{ab}{d}$, e per lo punto $H$ si tiri la $HE$ indefinita, e parallela alla $AN$. Sulla $AP$ prodotta si prenda $AK = m$, che in questo caso è sempre maggiore di $AP = a$, e si tiri $KO$ parallela ad $AB$. Al centro $O$, col semidiametro trasverso $OQ = \frac{f\sqrt{mm - am}}{d}$ (fatta $AN = f$) col semidiametro conjugato $= \frac{b\sqrt{mm - am}}{d}$, e parallelo ad $AH$ si descriva l'ellissi $QD$; presa una qualunque $AV = x$, sarà $VD = y$, ed essa il luogo ricercato.

141. Ho detto, che $AK$ ($m$) è maggiore di $AP$ ($a$); intorno a ciò cade in proposito lo spiegare, come di due quantità complesse possa conoscersi, quale sia la maggiore. Si instituisca adunque fra loro un rapporto di maggioranza, o di minorità, come più piace, indi si proceda, come nelle equazioni, trasportando, dividendo ec., e facendo altre operazioni fin a tanto, che si arrivi ad una conseguenza nota, la quale se è vera o assolutamente, o ipoteticamente, sarà assolutamente, o ipoteticamente vero il rapporto instituito, e se è falsa, questo pure sarà falso. Vogliasi adunque sapere se $m$, cioè $\frac{add - abb}{dd - bb - ee}$ sia maggiore di $a$. Si faccia il rapporto $\frac{add - abb}{dd - bb - ee} > a$, e riducendo al comune denominatore, $add - abb > add - abb - aee$, e cancellando i termini, che si elidono, sarà $0 > -aee$;

ma

ma è veriſſimo, che il zero è maggiore di quantità negativa, dunque è vero, che $\frac{add - abb}{dd - bb - ee}$ è maggiore di $a$.

Così volendo ſapere ſe $aa + 2ab$ ſia maggiore di $bb$, ſi faccia $aa + 2ab > bb$, ed aggiungendo all'uno ed all' altro membro il quadrato $bb$, ſarà $aa + 2ab + bb > 2bb$, e cavando la radice, $a + b > \sqrt{2bb}$, o ſia $a > \sqrt{2bb} - b$, ma poichè ſono date le quantità $a$, $b$, potraſſi ſempre ſapere, ſe $a$ ſia, o non ſia maggiore di $\sqrt{2bb} - b$, ed in caſo che lo ſia, ſarà anche $aa + 2ab$ maggiore di $bb$. La maniera è la ſteſſa ne' caſi più compoſti, e però non occorre parlarne più lungamente.

## PROBLEMA X.

142. *Date di poſizione due rette* VB, VE (Fig. 90.) *e dato il punto* P, *ſopra cui, come polo, s'aggiri la retta* PE, *ritrovare il luogo de' punti* D *tali, che ſia ſempre* CD *alla* DE *in ragione data*.

Si conduca $VP$, e parallele ad eſſa le rette $AD$, $BE$, e ſia la ragione di $CD$ a $DE$, o pure di $CD$ ad $EC$, come $d$ ad $e$, ed eſſendo dati gli angoli $EVB$, $EBV$, ſia $EB$ a $BV$, come $e$ ad $b$.

Si chiami $VP = a$, $VA = x$, $AD = y$, ſarà $EB = \frac{ev}{d}$,

e però $VB = \frac{by}{d}$. Per la similitudine de' triangoli $CVP$, $CDA$ sarà $DA, PV :: CA, CV$, e componendo, $DA + PV, PV :: AV, CV$, cioè $a + y, a :: x, CV$, e però $CV = \frac{ax}{a+y}$, e per la similitudine de' triangoli $PVC$, $EBC$ sarà $PV, VC :: EB, BC$, cioè $a, \frac{ax}{a+y} :: \frac{ey}{d}, BC$, onde $BC = \frac{exy}{ad+dy}$, e però l'equazione $BC + CV = BV$, cioè $\frac{exy + adx}{ad + dy} = \frac{hy}{d}$, o sia $yy - \frac{exy}{b} = \frac{adx}{b} - ay$.

Per costruirla si ponga $y - \frac{ex}{b} = \frac{ez}{b}$, sostituendo sarà $\frac{ezy}{b} = - ay - \frac{adz}{b} + \frac{ady}{e}$, cioè $zy + \frac{aby}{e} - \frac{adby}{ee} = - \frac{adz}{e}$.

Si ponga in oltre $z + \frac{ab}{e} - \frac{adb}{ee} = p$, sarà adunque $py = \frac{aadb}{ee} - \frac{aaddb}{e^3} - \frac{adp}{e}$, e fatta la terza sostituzione $y + \frac{ad}{e} = q$, sarà finalmente $pq = \frac{aaedb - aaddb}{e^3}$, iperbola fra gli asintoti, il di cui rettangolo costante è positivo, perchè la $e$ sarà sempre maggiore della $d$.

Si produca $PV$ indefinitamente, e si prenda $VQ = \frac{ad}{e}$; dal punto $Q$ si tiri l'indefinita $QS$ parallela ad $VB$, e preso un qualunque punto $M$ nella retta $PH$, e condotta $MN$ parallela ad $VB$, per la similitudine de' triangoli $VMN$,

$VMN$, $EBV$, farà $VM$, $MN :: e, h$. Si faccia $VI = \frac{aeh - adh}{ee}$, e per lo punto $I$ condotta indefinita la retta $RIK$ parallela ad $VE$, fra gli afintoti $RS$, $RK$ fi defcriva l'iperbola $OVD$ del rettangolo coftante $= \frac{aaedh - aaddh}{e^3} \times \frac{f}{e}$ (chiamata $f$ la nota $VN$) la quale neceffariamente pafferà per lo punto $V$. Prefa una qualunque $VH = y$, farà $HD = x$, cioè $VA = x$, $AD = y$, e la curva così defcritta il luogo de' punti $D$; il che ec.

143. Ricavando l'equazione dalla proprietà delle curve defcritte sì negli addotti efempj, come ne' problemi, deve effa effere la fteffa dell' equazione propofta da coftruirfi quando le operazioni fieno giufte, e ciò può fervire per dimoftrazione del metodo, il che a bello ftudio ô tralafciato di fare, per non recare troppo di noja. Tuttavia però, per darne brevemente un picciol faggio, prendo le coftruzioni dell'Efempio 13., e del Problema 8.

E quanto all'Efempio. Pofta (*Fig.* 65.) $AD = x$, ed effendo $AS = 2a$, $AF = f$, farà $AC = \frac{fx}{2a}$, e poichè $AR = \frac{hn}{2m}$, farà $AQ = \frac{hfn}{4am}$, e però $QC = \frac{fx}{2a} - \frac{hfn}{4am} = MP$; adunque effendo il femidiametro $HM = \frac{ef}{2a}$, averaffi $HP = \frac{ef + fx}{2a} - \frac{hfn}{4am}$, e $PV = \frac{ef}{2a} - \frac{fx}{2a} + \frac{hfn}{4am}$. Così poichè $DN = y$, $CD = \frac{bx}{2a}$,

CP

$CP = QM = \frac{1}{2}c$, farà $PN = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Ma, per la proprietà dell' elliffi, deve effere $HP \times PV$, $\overline{PN}^2 :: HV$ al parametro, che è $= \frac{4aem}{fn}$, dunque fi avrà l'equazione $\overline{\frac{eeff - ffxx}{4aa} + \frac{ffbnx}{4aam} - \frac{ffbbnm}{16aamm}} \times \frac{4aam}{ffn} = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy$, cioè $\frac{mee - mxx}{n} + bx - \frac{bbn}{4m} = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy$, e reftituito in luogo di $ee$ il fuo valore $\frac{ccmn + 4agmn + nnbb}{4mm}$, farà $\frac{cc}{4} + ag - \frac{mxx}{n} + bx = \frac{cc}{4} + \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} + cy + \frac{bxy}{a} + yy$, e finalmente reftituendo i valori di $-\frac{m}{n} = \frac{bb - 4aa}{4aa}$, e di $b = \frac{bc - 2al}{2a}$, fi avrà $ag - xx - lx = cy + \frac{bxy}{a} + yy$, che è appunto l'equazione propofta da coftruirfi.

Nella coftruzione dell'ultimo Problema (*Fig.* 90.), effendo $\overline{\frac{aaedh - aaddh}{e^3}} \times \frac{f}{e}$ il rettangolo coftante dell' iperbola, ed $VI = \frac{aeh - adh}{ee}$, e parallela all'afintoto $RS$, farà $RI = \frac{adf}{ee}$; ma per la fimilitudine de' triangoli $VMN$, $VHG$, è $VM$, $VN :: VH$, $VG$, e però $VG = \frac{fy}{e} = IK$,

adun-

adunque $RK = \frac{adf + fy}{ee \quad e}$; ma $HG = \frac{by}{e}$, $GK = VI = \frac{aeh - adh}{ee}$, quindi $HK = \frac{hey + aeh - adh}{ee}$; ma $HD = VA = x$, dunque sarà $KD = \frac{hey + aeh - adh - eex}{ee}$, e perchè, per la proprietà della curva, deve essere il rettangolo di $\overline{RK} \times \overline{KD}$ eguale al rettangolo costante, dunque $\frac{adf + efy}{ee} \times \frac{hey + aeh - adh - eex}{ee} = \frac{aaedh - aaddh}{e^3} \times \frac{f}{e}$, cioè $yy - \frac{exy}{b} + ay - \frac{adx}{b} = 0$, come doveva essere.

Fatta la stessa diligenza ad ogni Esempio, e Problema, si troverà essere giusto il metodo.

# CAPO IV.

*Delle Equazioni, e de' Problemi solidi.*

144. RAdice di una qualunque equazione si chiama ciascuna di quelle quantità, che sostituite nell'equazione in luogo di quella lettera, secondo cui l'equazione stessa è ordinata, cioè in luogo di quella, che fa figura d'incognita, fanno svanire tutti i termini; ovvero (ciò che è lo stesso) radice d'un'equazione è ciascuno de' valori dell'incognita, o della lettera, che fa figura d'incognita nell'equazione.

Le radici adunque dell'equazione $xx - ax + bx - ab = 0$ saranno due, una $a$, l'altra $-b$, perchè ciascuna di queste sostituita in luogo di $x$ fa svanire i termini dell'equazione; o perchè sì $a$, come $-b$ sono i valori della lettera $x$ nell'equazione proposta. Le radici dell'equazione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$ saranno $1, 2, 3, -5$; perchè appunto ciascuno di questi numeri sostituito in luogo della $x$ fa svanire tutti i termini, o perchè ciascuno di questi numeri è un valore della incognita $x$. Le radici dell'equazione $x^4 - bbxx \begin{matrix} -a^4 \\ -aabb \end{matrix} = 0$ saranno $+\sqrt{-aa}$, $-\sqrt{-aa}$, $+\sqrt{aa+bb}$, $-\sqrt{aa+bb}$, e così dell'altre tutte.

145.

145. In altro senso ancora sogliono prendersi le radici d'un'equazione, cioè sottraendo dall'incognita ad uno ad uno i valori positivi, ed aggiungendo i negativi, e paragonandoli al zero, onde in questo senso le radici dell' equazione $xx - ax + bx - ab = 0$ saranno $x - a = 0$, $x + b = 0$. Dell'equazione $x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0$ saranno $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 5 = 0$, e così dell'altre, ed in questo senso dicesi, che ogni equazione è il prodotto delle sue radici, perchè tra loro moltiplicate formano appunto l'equazione, di cui sono esse le radici; quindi è, che tante saranno le radici delle equazioni, comprese le immaginarie, quanto è il grado loro, e però due saranno le radici dell'equazione quadratica, tre della cubica, quattro di quella del quarto grado ec.

Si moltiplichi $x + a = 0$ in $x + b = 0$, nascerà l'equazione quadratica (I.) $\begin{matrix} xx + ax + ab = 0 \\ + bx \end{matrix}$, questa di nuovo si moltiplichi in $x - c = 0$, e nascerà l'equazione del terzo grado (II.) $\begin{matrix} x^3 + axx + abx - abc \\ + bxx - acx \\ - cxx - bcx \end{matrix} = 0$, e questa di nuovo si moltiplichi in $x + d = 0$, e sarà l'equazione del quarto grado (III.)

$$\begin{matrix} x^4 + ax^3 + abxx - abcx - abcd \\ + bx^3 - acxx + abdx \\ - cx^3 - bcxx - acdx \\ + dx^3 + adxx - bcdx \\ + bdxx \\ - cdxx \end{matrix} = 0$$

Si moltiplichi $x + \sqrt{ab} = 0$ in $x - \sqrt{ab} = 0$, sarà $xx - ab = 0$, e

e questa si moltiplichi in $x+c=0$, sarà $x^3+cxx-abx-abc=0$, e di nuovo si moltiplichi in $x+c=0$, sarà

$$x^4+2cx^3-abxx-2abcx-abcc=0$$
$$+ccxx$$

Si moltiplichi $x+\sqrt{-ab}=0$ in $x-\sqrt{-ab}=0$ in $x+a=0$, sarà $x^3+axx+abx+aab=0$.

146. Se adunque si averà modo di sapere, quali sieno i valori o tutti, o alcuni dell'incognita dell'equazione, si potrà sempre essa dividere per tante equazioni semplici, quanti sono i valori noti, aggiungendo all'incognita i valori negativi, e sottraendone i positivi. Quindi l'equazione prima è divisibile per $x+a$, e per $x+b$; la seconda per $x+a$, $x+b$, $x-c$; la terza per $x+a$, $x+b$, $x-c$, $x+d$ ec.; con che si riducono le equazioni composte in tante semplici, quante sono le radici, se tutte sono note, e si abbassano di tanto grado, quanto è il numero delle note, se non lo sono tutte; e però l'equazione, per esempio, del quinto grado si ridurrà al quarto, se si sappia una delle sue radici; al terzo quando se ne sappiano due ec.

147. Dal modo, con cui nascono le equazioni (che s'intenderanno sempre ridotte al zero, e nelle quali il massimo termine rispetto all'incognita, o rispetto a quella lettera, secondo cui sono ordinate, sia positivo, e libero da coefficienti) è facile il riconoscere, che il coefficiente dell' incognita, o sia della lettera, secondo cui è ordinata l'equazione, nel secondo termine è la somma di tutte le

ra-

radici dell'equazione affette dal ſegno contrario; il coefficiente del terzo termine è la ſomma di tutti gli ambj, che ſi poſſono fare da eſſe radici; il coefficiente del quarto la ſomma di tutti i terni, e così di mano in mano fino all' ultimo termine coſtante, che è il prodotto di tutte le radici fra loro.

148. Da ciò s'inferiſce, che la ſomma delle radici poſitive dovrà neceſſariamente eſſere eguale alla ſomma delle negative in tutte quelle equazioni, nelle quali manca il ſecondo termine; e che la ſomma delle poſitive ſarà maggiore della ſomma delle negative, quando il ſecondo termine ſia affetto dal ſegno negativo, ed all' oppoſto, quando eſſo ſia affetto dal ſegno poſitivo.

149. Mancando nell'equazione un qualche termine, ſi ſuole nel luogo del termine mancante ſcrivere un' aſteriſco, come $x^4 \; * + aaxx - b^3x + a^4 = 0$ ſe manca il ſecondo termine; $x^4 - ax^3 \; * - b^3x + a^4 = 0$ ſe manca il terzo, e così degli altri.

150. Se l'equazione non avrà termine alcuno affetto da quantità immaginaria, le radici ſue ſaranno o tutte reali, o avendone delle immaginarie, ſaranno eſſe in numero pari, ed eguali a due a due, con la ſola diverſità, che una ſarà poſitiva, e l'altra negativa; imperciocchè eſſendo il ſecondo termine la ſomma di tutte le radici, ſe l'equazione â il ſecondo termine, quando le radici immaginarie non ſi diſtruggano a due a due coi ſegni contrarj, in eſſo coefficiente vi ſarà neceſſariamente qualche immagi-

ginario contro il suppoſto ; ſe poi manca il ſecondo termine , appunto egli non può mancare , ſe non quando la ſomma delle radici poſitive ſia eguale alla ſomma delle negative , e per conſeguenza ancora la ſomma delle immaginarie poſitive eguale alla ſomma delle immaginarie negative , cioè ſe non quando eſſe ſi diſtruggano nel modo ſuddetto . Le equazioni adunque di grado diſpari averanno neceſſariamente una radice per lo meno reale , e quelle di grado pari potranno averle tutte immaginarie . Medeſimamente ſi diſcorra , per la ſteſſa ragione , delle radici ſorde ; vale a dire , che ſe l'equazione non averà termini ſordi , o irrazionali , le di lei radici o ſaranno tutte razionali , o le irrazionali ſaranno di numero pari a due a due eguali , ma con ſegno contrario .

151. Vi ſono delle equazioni , che ânno tutte le radici poſitive, dell'altre, che le ânno tutte negative, e dell' altre , che ne ânno e delle poſitive , e delle negative, ſiccome ve ne ſono di quelle , che le ânno tutte immaginarie , altre tutte reali, altre finalmente, che ne ânno e delle reali, e delle immaginarie . Diverſe regole ſi danno dagli Scrittori d'Algebra , per conoſcere in una qualunque data equazione il numero delle radici poſitive e negative, delle reali , e delle immaginarie ; ma perchè queſte regole , e le loro dimoſtrazioni ſono aſſai compoſte e proliſſe, e di pochiſſimo uſo , da me ſi tralaſciano , baſtando il ſapere ; primo , che ſe tutte le radici ſono negative , ſaranno poſitivi tutti i termini dell'equazione , imperciocchè eſſen-

sendo positivi in questo caso tutti i termini delle equazioni semplici, cioè delle radici prese nel secondo significato (num. 145.), dalle quali s'intende generata la proposta, saranno altresì positivi tutti i prodotti; secondo, che se tutte le radici sono positive, i termini dell'equazione saranno alternativamente positivi, e negativi, poichè il primo termine, come si suppone, già sarà sempre positivo; il secondo termine, poichè contiene la somma di tutte le radici ( le quali essendo positive, saranno negative nelle equazioni semplici ) sarà negativo; il terzo termine contenendo gli ambj, cioè prodotto di numero pari, sarà positivo; il quarto contenendo i terni, cioè prodotto di numero dispari, sarà negativo, e così di mano in mano, e però un' equazione composta alternativamente di segni positivi, e negativi averà tutte le radici positive.

Quindi se i termini di un' equazione non averanno tutti il segno positivo, o non averanno alternativamente il positivo, e negativo, vi saranno radici positive, e negative. Altro argomento sicuro, che l'equazione contenga radici positive, e negative, sarà quando in essa manchi qualche termine, perchè non può un termine mancare, se non distruggendosi con i segni contrarj i prodotti, da' quali è formato, cioè se non essendovi delle radici positive, e negative. Questa notizia potrà servire per scegliere a suo luogo fra i molti divisori dell'ultimo termine di una formola, o equazione quelli, per i quali devesi tentare la divisione; perchè se l'equazione averà sole radici positive,

tive, farà fuperfluo il tentare la divifione per i divifori pofitivi, e fe avrà fole radici negative, farà fuperfluo il tentarla per i divifori negativi; e fi dovrà tentare per gli uni, e per gli altri, quando le radici fieno pofitive, e negative.

Tutto ciò però s'intenda detto di quelle equazioni, le di cui radici fono tutte reali, perchè nel cafo delle immaginarie la regola non â luogo. Ed in fatti fia l'equazione $x^3 + bxx + aax + aab = 0$, in cui ciafcun termine è affetto dal fegno pofitivo, e pure le radici fono una pofitiva, e due negative, cioè $x = -b$ reale, ed $x = \pm\sqrt{-aa}$ immaginarie.

152. Le equazioni del terzo, e quarto grado, nelle quali manchi il fecondo termine, fe il terzo farà affetto dal fegno pofitivo, averanno infallibilmente delle radici immaginarie, perchè, effendo le radici tutte reali, il terzo termine non può non effere affetto dal fegno negativo; e la ragione fi è, che, parlando in primo luogo delle cubiche, quando in effe manchi il fecondo termine, la fomma delle radici pofitive è eguale alla fomma delle negative, e però o una pofitiva farà eguale a due negative, o due pofitive eguali alla negativa; quindi le radici fieno, per efempio, $a$, $b$, e $-c$, o pure $-a$, $-b$, $+c$, il coefficiente del terzo termine farà $ab - ac - bc$, ma deve effere $a + b = c$ nella fuppofizione, che manchi il fecondo termine, adunque farà $ac$ maggiore di $ab$, e perciò $ab - ac - bc$ quantità negativa.

Nelle

Nelle equazioni poi del quarto grado possono essere tre le radici positive, ed una negativa, cioè $a$, $+b$, $+c$, $-d$; possono essere tre negative, ed una positiva, cioè $-a$, $-b$, $-c$, $+d$; possono essere due negative, e due positive, cioè $-a$, $-b$, $+c$, $+d$; nel primo, e secondo caso il coefficiente del terzo termine sarà $ab + ac + bc - ad - bd - cd$; ma per la supposizione deve essere $a + b + c = d$, adunque sarà $ad$ maggiore di $ab$, $cd$ maggiore di $ac$, $bd$ maggiore di $bc$, e però $ad + bd + cd$ maggiore di $ab + ac + bc$, ed in conseguenza il terzo termine negativo. Nel terzo caso il coefficiente del terzo termine sarà $ab - ac - bc - ad - bd + cd$, e deve essere $a + b = c + d$.

Si faccia $m = a + b = c + d$, sarà

$$mm = \overline{a + b} \times \overline{c + d} = ac + ad + bc + bd,$$

$$mm = \overline{a + b}^2 = aa + 2ab + bb,$$

$$mm = \overline{c + d}^2 = cc + 2cd + dd,$$ e però

$$ab = \frac{mm - aa - bb}{2},$$

$$cd = \frac{mm - cc - dd}{2},$$

e $ab + cd = \frac{mm - aa - bb - cc - dd}{2}$, dunque $mm$ è maggiore di $ab + cd$, dunque $ac + ad + bc + bd$ è maggiore di $ab + cd$, e però il coefficiente del terzo termine negativo.

153. Egli è sempre in nostra mano il fare, che in una qualunque equazione tutte le radici vere o positive divengano false o negative, e le negative divengano positive. Nulla di più per ciò fare si richiede, che cambiare i segni a tutti i termini, che sono in ordine pari; cioè al secondo, al quarto, al sesto ec., la ragione si è, che essendo il secondo termine la somma di tutte le radici, in cui però sono le negative con segno positivo, e le positive con segno negativo, come chiaramente si è veduto al num. 145. nel formare le equazioni composte dal prodotto delle semplici, mutando i segni si muteranno esse pure; gl'altri termini in ordine pari sono formati da prodotti di numero dispari di radici, cioè il quarto da terni, il sesto da cinquine ec., quindi se ânno essi il segno positivo saranno formati dal prodotto di radici tutte negative, o da numero pari di radici positive, e numero dispari di radici negative; e se ânno il segno negativo saranno formati dal prodotto di radici tutte positive, o da numero pari di radici negative, e numero dispari di radici positive; dunque mutando il segno ai termini pari, le radici positive diverranno negative, ed all'opposto.

Rispetto ai termini dispari in ordine, essendo essi formati da prodotti pari di radici, se ânno il segno positivo, saranno formati o da numero pari di sole radici negative, o da numero pari di sole radici positive, o da numero

mero pari di positive, e pari di negative, quindi mutandosi reciprocamente queste, non si muterà il segno ad essi termini; se poi ànno il segno negativo, saranno formati da prodotto di numero dispari di radici positive in numero dispari di negative, quindi mutandosi pure queste reciprocamente, non si muterà il segno ad essi termini, e però si devono lasciare intatti.

L'equazione
$$\begin{array}{llll} x^3 + axx + abx - abc & & \\ \quad + bxx - acx & & = 0 \end{array}$$
$$\quad - cxx - bcx$$
à tre radici, due sono negative, cioè $-a$, $-b$, o sia $x + a = 0$; $x + b = 0$, ed una positiva, cioè $c$, o sia $x - c = 0$. Mutando i segni a' termini in ordine pari dell'equazione, sarà
$$\begin{array}{l} x^3 - axx + abx + abc \\ \quad - bxx - acx \qquad = 0 \\ \quad + cxx - bcx \end{array}$$
e le radici positive saranno $x - a = 0$, $x - b = 0$; ed $x + c = 0$ la negativa. Nè importa, che alcun termine manchi, nel qual caso si pone la stelletta in luogo de' termini mancanti, e procede la stessa regola. Così nell'equazione $x^3 * - 28x + 48 = 0$, le di cui radici vere sono $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, e la falsa $x + 6 = 0$, mutando i segni ai termini pari in ordine, sarà $x^3 * - 28x - 48 = 0$, le di cui radici false sono $x + 2 = 0$, $x + 4 = 0$, e la vera $x - 6 = 0$.

154. Data una qualunque equazione, è facile per mezzo di congrue sostituzioni accrescere, o diminuire ciascuna

ciascuna delle di lei radici, anco non cognite, d'una data quantità, cioè trasformarla in un'altra equazione, le radici della quale sieno quelle della proposta accresciute, o diminuite della data quantità. Si ponga eguale ad una nuova incognita la incognita dell'equazione, aggiunta o sottratta da essa la data quantità, cioè aggiunta se per essa si vogliono accresciute, e sottratta se si vogliono diminuite. In luogo dell'incognita, e sue potestà nell'equazione proposta si sostituisca il suo valore dato per l'altra incognita, e per la costante data; e nascerà un'altra equazione, le di cui radici saranno come si cercano. Sia l'equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, le di cui radici si vogliano accresciute del numero 3. Si faccia $x + 3 = y$, e però $x = y - 3$, $xx = yy - 6y + 9$, $x^3 = y^3 - 9yy + 27y - 27$, $x^4 = y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$; adunque facendo le sostituzioni in luogo della $x$, e sue potestà nella proposta, si trasformerà essa in quest'altra

$$\begin{array}{r} y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 \\ +4y^3 - 36yy + 108y - 108 \\ -19yy + 114y - 171 \quad = 0 \\ -106y + 318 \\ -120 \end{array}$$

cioè $y^4 - 8y^3 - yy + 8y = 0$, e dividendo per $y$, $y^3 - 8yy - y + 8 = 0$, in cui è manifesto, che le radici saranno maggiori delle radici della proposta, quanto

è il numero 3, perchè se si è fatto $y = x + 3$, adunque sarà $y$ uguale a ciascun valore di $x$ accresciuto del 3. E quì si rifletta, che nell'accrescere in questo modo le radici, si accrescono di quella tale quantità le positive, ma le negative si diminuiscono della stessa quantità, perchè aggiungendo positivo a negativo, se il negativo è maggiore del positivo, si fa minore nel genere suo di prima, se è eguale si fa zero, se è minore si rende positivo; quindi nella proposta equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$, le di cui radici (le quali però non si sanno per ora ritrovare coi metodi insegnati) sono $+5, -2, -4, -3$, cioè $x - 5 = 0, x + 2 = 0, x + 4 = 0, x + 3 = 0$ una vera e tre false, avendo io voluto accrescerle del numero 3, nella trasformata $y^3 - 8yy - y + 8 = 0$ dovranno essere $+8, +1, -1$, cioè $y - 8 = 0, y - 1 = 0, y + 1 = 0$, che tali appunto sono, ed è zero quella che corrisponderebbe alla quarta, perchè $-3 + 3 = 0$, e per questa ragione è di sole tre dimensioni l'equazione ridotta, sebbene di quattro la proposta.

All'opposto quando si diminuiscono d'una data quantità le radici di un'equazione, per la stessa ragione le negative crescono nel genere suo di quella quantità, ma le positive possono divenire nulle, se la data quantità è a loro uguale, e negative s'è di loro maggiore. Nella stessa equazione $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 = 0$ volendo diminuire del numero 3 le radici, si faccia

cia $x-3=y$, e però $x=y+3$, $xx=yy+6y+9$, $x^3=y^3+9yy+27y+27$, $x^4=y^4+12y^3+54yy+108y+81$, e però fatte le sostituzioni, sarà l'equazione

$$\begin{array}{r} y^4+12y^3+54yy+108y+81 \\ +4y^3+36yy+108y+108 \\ -19yy-114y-171 \\ -106y-318 \\ -120 \end{array} = 0$$

cioè $y^4+16y^3+71yy-4y-420=0$, e perchè le radici della proposta sono $5, -2, -3, -4$, cioè $x-5=0$, $x+2=0$, $x+3=0$, $x+4=0$, dovranno essere quelle della trasformata $2, -5, -6, -7$, cioè $y-2=0$, $y+5=0$, $y+6=0$, $y+7=0$, che tali appunto sono.

Sia l'equazione $x^3+cxx-bbx-bbc=0$, e si vogliano accrescere della data quantità $a$ le di lei radici. Si faccia $x+a=y$, e però $x=y-a$, $xx=yy-2ay+aa$, $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$; quindi fatte le sostituzioni, sarà l'equazione

$$\begin{array}{r} y^3-3ayy+3aay-a^3 \\ +cyy-2acy+aac \\ -bby+abb \\ -bbc \end{array} = 0,$$

le di cui radici sono maggiori di quelle della proposta, quanto è la quantità $a$, ed in fatti le radici di quella sono $x-b=0$, $x+b=0$, $x+c=0$, e di questa sono $y-b+a=0$, $y+b-a=0$, $y+c-a=0$.

155. In simil modo si potrà, data un'equazione, trasformarla in un'altra, le di cui radici sieno le medesime della proposta, ma moltiplicate, o divise per una data quantità, per esempio $f$, facendo la sostituzione di $fx = y$ (essendo $x$ l'incognita della data equazione) se si vogliano moltiplicate, e facendo $x = \frac{y}{f}$ se si vogliano divise. Così pure si farà $x = \frac{gy}{f}$ se si voglia, che le radici della trasformata abbiano a quelle della proposta la ragione di $f$ alla $g$; e farassi $\sqrt{fx} = y$ se si voglia, che sieno medie proporzionali tra la quantità $f$, e le radici della proposta. Similmente farassi $x = \frac{1}{y}$ se si voglia, che sieno reciproche ec.

156. La ragione di queste regole è chiara; imperocchè, preso il primo caso, cioè quello delle radici accresciute, facendosi la sostituzione di $x + a = y$, i valori di $y$ cavati dall'equazione trasformata saranno eguali ad $x + a$, cioè eguali ai valori della proposta accresciuti della quantità $a$; e similmente si discorra in proporzione negl'altri casi.

157. Molti sono gli usi, che si possono fare delle dette sostituzioni; uno può essere, che se, non avendo noi il modo di riconoscere, quali sieno le radici d'una proposta equazione, trasformandola in alcuna delle accen-

cennate maniere si potessero ritrovare le radici della trasformata, queste accresciute, o diminuite, moltiplicate, o divise ec., per la quantità costante, secondo la sostituzione fatta, sarebbero anche le radici della proposta.

158. Altro uso sarà di liberare qualora si vuole dalle frazioni, e molte volte da' sordi le equazioni. E quanto alle frazioni, si faccia l'incognita dell'equazione eguale ad una nuova incognita divisa per la minima quantità, che per ciascuno de' denominatori de' termini dell'equazione sia divisibile, la quale nel caso, che essi denominatori fossero primi tra loro, sarà il prodotto de' medesimi; indi fatte le sostituzioni, e ridotti i termini al comune denominatore, si avrà un'altra equazione libera dalle frazioni, le di cui radici saranno quelle della proposta moltiplicate nella quantità, per cui è stata divisa la nuova incognita. Sia l'equazione $y^3 + \frac{ayy}{6} - \frac{aby}{3} + aab = 0$; si faccia $y = \frac{z}{6}$, $yy = \frac{zz}{36}$, $y^3 = \frac{z^3}{216}$, onde sarà l'equazione $\frac{z^3}{216} + \frac{azz}{6 \times 36} - \frac{abz}{3 \times 6} + aab = 0$, e riducendo al comune denominatore, sarà $z^3 + azz - 12abz + 216aab = 0$, le di cui radici divise per $6$ saranno le radici della proposta. Sia $x^3 - \frac{axx}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$. Si faccia $x = \frac{z}{bcd}$, e

fatte

fatte le sostituzioni, sarà la trasformata $\frac{z^3}{b^3c^3d^3} - \frac{azz}{b^3ccdd} + \frac{aaz}{bccd} + \frac{a^3}{d} = 0$, e riducendo al comune denominatore, sarà $z^3 - acdzz + aabbcddz + a^3b^3c^3dd = 0$; quindi se si sappia il valore di $z$, si saprà quello di $x$ ancora. Medesimamente per liberare le equazioni da' sordi, il che succede talora, si ponga la incognita eguale ad una nuova incognita divisa per la radicale, e si facciano le sostituzioni. Sia l'equazione $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26x}{27} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$. Si faccia $x = \frac{z}{\sqrt{3}}$; e però $xx = \frac{zz}{3}$, $x^3 = \frac{z^3}{3\sqrt{3}}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{z^3}{3\sqrt{3}} - \frac{zz\sqrt{3}}{3} + \frac{26z}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, e moltiplicando per $3\sqrt{3}$, sarà $z^3 - 3zz + \frac{26z}{9} - \frac{8}{9} = 0$; e finalmente liberando dalle frazioni nella suddetta maniera col fare $z = \frac{y}{9}$, ovvero $z = \frac{y}{3}$, che in questo caso riesce più brevemente, sarà l'equazione $y^3 - 9yy + 26y - 24 = 0$. E perchè per la prima sostituzione è $x = \frac{z}{\sqrt{3}}$, e per la seconda $z = \frac{y}{3}$, sarà $x = \frac{y}{3\sqrt{3}}$, cioè il valore della $x$ sarà eguale al valore della $y$ diviso per $3\sqrt{3}$.

Sia $x^4 - x^3 \sqrt[3]{nn} + pxx \sqrt[3]{n} - qx + \frac{r}{\sqrt[3]{n}} = 0$; si faccia $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$, e però $xx = \frac{yy}{\sqrt[3]{nn}}$, $x^3 = \frac{y^3}{n}$, $x^4 = \frac{y^4}{n\sqrt[3]{n}}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{y^4}{n\sqrt[3]{n}} - \frac{y^3 \sqrt[3]{nn}}{n} + \frac{pyy \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{nn}} - \frac{qy}{\sqrt[3]{n}} + \frac{r}{\sqrt[3]{n}} = 0$, e moltiplicando per $n\sqrt[3]{n}$, sarà $y^4 - ny^3 + npyy - nqy + rn = 0$. Se si voglia osservare la legge degl' omogenei, si libereranno dai radicali le equazioni, ma nasceranno delle frazioni, che dovranno ridursi, come si è detto.

159. Poichè levando i radicali per mezzo dell'accennata sostituzione null'altro si fa, che moltiplicare le radici dell'equazione per esso radicale, è facile il conoscere, che se il radicale sarà quadratico, per esempio $\sqrt{n}$, bisognerà, acciò possa togliersi dall'equazione, che il secondo termine dell'equazione proposta contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo egli il complesso di tutte le radici dell'equazione, si verrà a moltiplicare per $\sqrt{n}$; converrà, che il terzo non contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo egli il complesso degl'ambj de' valori o radici dell'equazione, si verrà a moltiplicare per il quadrato di $\sqrt{n}$; così converrà, che il quarto contenga $\sqrt{n}$, perchè essendo

il compleſſo di tutti i terni verrà in conſeguenza a moltiplicarſi per $n\sqrt{n}$; Converrà, che il quinto non contenga eſſo radicale, e così alternativamente. Per la ſteſſa ragione, ſe il radicale da toglierſi foſſe $\sqrt[3]{n}$, biſognerà, che nel ſecondo termine dell' equazione propoſta ſi trovi $\sqrt[3]{nn}$, nel terzo $\sqrt[3]{n}$, in neſſun modo nel quarto, $\sqrt[3]{nn}$ nel quinto, $\sqrt[3]{n}$ nel ſeſto, in neſſun modo nel ſettimo ec. In proporzione ſi diſcorra de' radicali di altro indice.

160. Per mezzo di queſte ſoſtituzioni ſi potrà pure levare il ſecondo termine da qualunque equazione, e ciò ponendo la incognita eguale ad una nuova incognita, aggiunto, o ſottratto il coefficiente del ſecondo termine diviſo per il grado dell' equazione data, cioè aggiunto, ſe eſſo ſecondo termine â il ſegno negativo, e ſottratto, ſe â il ſegno poſitivo. Sia l'equazione $xx + ax - bb = o$, ſi faccia $x = z - \frac{a}{2}$, e fatte le ſoſtituzioni, ſarà

$$\begin{aligned} zz - az &+ \frac{aa}{4} \\ + az &- \frac{aa}{2} \quad = o, \\ &- bb \end{aligned}$$

cioè $zz * - \frac{aa}{4} - bb = o$, o ſia $zz = \frac{aa}{4} + bb$, onde ſi vede, come tutte le equazioni di quadratica affetta ſi poſſono in

questo modo più speditamente risolvere di quello, che si è usato al num. 74.; sottratto pertanto $\frac{1}{2}a$ dal valore di $z$, averassi il valore della $x$.

Sia $x^3 + bxx - abx - a^3 = 0$. Si ponga $x = z - \frac{b}{3}$, e però fatte le sostituzioni, sarà

$$\left.\begin{array}{l} z^3 * - \frac{bbz}{3} + \frac{2b^3}{27} \\ \quad\; - abz + \frac{abb}{3} \\ \qquad\qquad - a^3 \end{array}\right\} = 0;$$

quindi levato $\frac{b}{3}$ dal valore di $z$, averassi il valore della $x$.

Sia l'equazione $\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0. \\ \qquad\qquad\quad - ccxx \end{array}$

Fatta $x = z + \frac{2a}{4}$, cioè $x = z + \frac{a}{2}$, e fatte le sostituzioni, sarà l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} z^4 * + \frac{1}{2}aazz - a^3z + \frac{5a^4}{16} \\ \qquad - cczz - accz - \frac{aacc}{4} \end{array}\right\} = 0.$$

E però aggiunto $\frac{1}{2}a$ al valore di $z$, averassi il valore di $x$.

161. Similmente si potrà levare il terzo termine dalle equazioni nel seguente modo. Sia l'equazione $x^4 - 3ax^3 + 3aaxx - 5a^3x - 2a^4 = 0$, si faccia $x = y - b$ (la $b$ è un'indeterminata da fissarsi) e fatte le sostituzioni,

sarà

ſarà

$$\begin{array}{l} y^4 - 4hy^3 + 6hhyy - 4h^3y + h^4 \\ \quad - 3ay^3 + 9ahyy - 9ahhy + 3ah^3 \\ \qquad + 3a^2yy - 6aahy + 3aahh \\ \qquad\quad - 5a^3y + 5a^3h \\ \qquad\qquad - 2a^4 \end{array} = 0.$$

Ma acciò che in queſta equazione foſſe nullo il terzo termine biſognerebbe, che foſſe $6hh + 9ah + 3aa = 0$, cioè $hh + \frac{3ah}{2} + \frac{aa}{2} = 0$, e però $h = -\frac{3a}{4} \pm \frac{a}{4}$, dal che s'impara a conoſcere, che la ſoſtituzione da farſi in luogo di $y - h$ doveva eſſere $y + \frac{a}{2}$, o pure $y + a$, come di fatto sì l'una, come l'altra ci toglie il terzo termine, dàndoci la prima $y^4 - ay^3 \ * - \frac{15a^3y}{4} - \frac{65a^4}{16} = 0$, e la ſeconda $y^4 + ay^3 \ * - 4a^3y - 6a^4 = 0$.

Con tale artifizio ſi conoſce, che per togliere il ſecondo termine ſi devono fare le ſoſtituzioni, che ſi ſono praticate al num. 160.

162. Che ſe un'equazione, in cui manchi il ſecondo termine, ſi vorrà trasformare in un'altra, in cui manchi il penultimo, baſterà fare la ſoſtituzione di una qualunque coſtante diviſa per una nuova incognita in luogo dell'incognita della data equazione. Sia pertanto $x^4 \ * + aaxx - a^3x + a^4 = 0$. Si faccia $x = \frac{aa}{y}$, ſarà $\frac{a^8}{y^4} + \frac{a^6}{yy} - \frac{a^5}{y} + a^4 = 0$,

e ri-

e riducendo al comune denominatore, e dividendo per $a^4$, sarà $y^4 - ay^3 + aayy * + a^4 = 0$. Se nella sostituzione $x = \frac{aa}{y}$ in luogo della costante $a$ avessi presa un'altra qualunque, avrei ottenuto il medesimo intento, ma l'equazione trasformata avrebbe avuto delle frazioni.

163. Che se nella proposta equazione non manca il secondo termine, ma bensì il terzo, o quarto ec., si potrà col medesimo metodo fare sparire quello, che dall' ultimo è egualmente distante, come quello, che manca, lo è dal primo.

164. Ed all'opposto mancando nell'equazione uno, o più termini, si potrà sempre renderla compita, facendo una nuova incognita più, o meno una qualunque costante eguale all'incognita dell'equazione, e la trasformata avrà tutti i termini. Se di più si volesse, che la trasformata fosse di grado superiore, si moltiplichi ciascun termine della proposta per tanta potestà dell'incognita, per quanta si vuole, che cresca il grado, indi si faccia la stessa sostituzione. Così se, data l'equazione $x^4 - a^4 = 0$, si volesse mutata in un'altra compita, e del sesto grado, farebbesi $x^6 - a^4xx = 0$, indi la sostituzione indicata, cioè $x = z \pm a$ (intendendo per $a$ qualunque si voglia costante) ed avrebbesi l'equazione, che si cerca, ommettendosi ora il calcolo per brevità.

165.

165. Ridotte le equazioni in maniera, che abbiano il massimo termine positivo, e senza coefficienti, che sieno libere da frazioni, e sordi, e paragonate al zero; prima di giudicare, che il problema sia di quel grado, di cui è l'equazione, bisogna vedere, se ella abbia divisori di una, di due, o di più dimensioni, per i quali divisa si riduca a grado inferiore; imperciocchè del grado della ridotta è propriamente il problema, e non della prima. Un'equazione cubica, se abbia un divisore di una dimensione, per esso divisa si riduce a due dimensioni, e le due radici di questa, che si averanno per le regole de' numeri 73., e 74., ed il divisore saranno le tre radici della proposta, quindi il problema, che a tale equazione ci â portati non è cubico, ma piano, e si potrà costruire *colla sola Regola*, e *Compasso*, cioè con rette linee, e circoli. Un'equazione del quarto grado se abbia due divisori di una dimensione, per essi divisa si ridurrà a due dimensioni, le radici della quale con i due divisori saranno le quattro radici della proposta, e però il problema sarà piano; nello stesso modo, se abbia un divisore di due dimensioni, un'altro di due dimensioni sarà il quoziente, le di cui radici con le radici del divisore saranno le quattro della proposta, e però piano il problema. Se poi avrà un solo divisore di una dimensione, la ridotta sarà di tre, ed il problema sarà bensì solido, ma del

terzo

terzo grado, e non del quarto, come appariva. Un' equazione del quinto grado, se avrà tre divisori di una dimensione, o uno di una, ed uno di due (che è lo stesso caso come se ne avesse due di due dimensioni, perchè necessariamente ne averebbe anche uno di una) si ridurrà a due dimensioni, e però si potranno avere le cinque radici, ed il problema sarà piano; se ne abbia un solo di una dimensione si ridurrà al quarto grado, e del quarto grado sarà il problema; se ne avrà due di una, o uno di due, si ridurrà al terzo grado, ed il problema sarà del terzo grado: in simil modo si discorra dell'altre. La maniera di ritrovare i divisori di una dimensione è stata insegnata al num. 56.

166. Ma oltre a questi, siccome possono avere le equazioni dei divisori di due, e più dimensioni, sì razionali, come irrazionali, con essi in simil modo operando, e nella stessa maniera discorrendo, devesi tentare la divisione dell'equazione proposta, quando però siasi provata prima la divisione per i divisori di una dimensione, il che generalmente devesi sempre premettere, qualunque siasi l'equazione.

167. La maniera di ritrovare questi divisori per le equazioni del quarto grado può essere la seguente; giacchè quelle del terzo, o sono irriducibili, o si possono ridurre per un divisore lineare razionale, per essere esse (come si suppone) libere da' radicali.

Sup-

Suppoſto, che l'equazione del quarto grado ſia per i diviſori d'una ſola dimenſione irriducibile, ſi tolga da eſſa il ſecondo termine, (num. 160.) e naſca, per eſempio, l'equazione $x^4 * - 17aaxx - 20a^3x - 6a^4 = 0$. Si ſupponga queſta eguale al prodotto di due del ſecondo grado, cioè di $xx + xy + z = 0$, e di $xx - xy + u = 0$, nelle quali le $y$, $z$, $u$ ſono indeterminate da fiſſarſi nel progreſſo, e le $u$, $z$ poſſono avere qualunque ſegno; il prodotto ſarà

$$\begin{array}{llll} x^4 & * + zxx & & \\ & - yyxx & - yzx + uz & = 0, \\ & + uxx & + uyx & \end{array}$$

quindi ſi paragoni termine per termine queſta equazione colla propoſta; e dal paragone de' terzi termini ſi ricava $z = -17aa + yy - u$; dal paragone de' quarti $u = -\frac{20a^3}{y} + z$, e ponendo in luogo di $z$ il valore già ritrovato a fine d'avere la $u$ data ſolo per la $y$, e per le note, ſarà $u = -\frac{20a^3}{2y} - \frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2}$, e ponendo queſto valore di $u$ nell'equazione $z = -17aa + yy - u$, averaſſi $z = -\frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2} + \frac{20a^3}{2y}$; dal paragone degl'ultimi termini ſi ricava $uz = -6a^4$, e ponendo in luogo di $z$, e di $u$ i ſuoi valori dati per la ſola $y$, e per le note, ſarà $\frac{289a^4}{4} - \frac{34aayy}{4} - \frac{400a^6}{4yy} + \frac{y^4}{4} = -6a^4$, cioè riducendo al comune denominatore, $\begin{array}{l} y^6 - 34aay^4 + 289a^4yy - 400a^6 \\ \qquad\qquad + 24a^4yy \end{array} = 0$,

 equa-

equazione trasformata, che si può considerare come del terzo grado, per non esservi nè $y^5$, nè $y^3$, nè $y$. In questa equazione si ritrovino i divisori dell'ultimo termine; e perchè, sebbene ella è del sesto grado, pure si considera, come del terzo, si tenti se sia divisibile per $yy \pm$ questi divisori, tra quali si sceglieranno quelli soli di due dimensioni, come è chiaro; e si ritroverà, che è divisibile per $yy - 16aa = 0$, adunque sarà $yy = 16aa$, ed $y = \pm 4a$. Nelle equazioni $u = -\frac{20a^3}{2y} - \frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2}$, e

$z = \frac{20a^3}{2y} - \frac{17aa}{2} + \frac{yy}{2}$, sostituito il valore di $y = 4a$, avrassi $u = -3aa$, $z = 2aa$; adunque le due equazioni sussidiarie $xx + xy + z = 0$, $xx - xy + u = 0$ dovranno essere $xx + 4ax + 2aa = 0$, e $xx - 4ax - 3aa = 0$, nelle quali si risolve l'equazione $x^4 * - 17aaxx - 20a^3x - 6a^4 = 0$, se per una di esse si divida.

Ma le radici di quelle sono (nu. 74.) $x = -2a \pm \sqrt{2aa}$ per la prima, ed $x = 2a \pm \sqrt{7aa}$ per la seconda; dunque sono anche le radici dell'equazione $x^4 - 17aaxx$ ec., e tutte quattro reali, una positiva, e tre negative.

Se l'equazione trasformata non avesse divisore alcuno, non occorrerebbe cercare altro in questo caso, perchè nè meno ne averebbe la proposta.

Quantunque nel valore della $y$ si abbia $y = \pm 4a$, pure ò fatto uso del solo segno positivo, perchè è affatto in-

indifferente il servirsi del positivo, o del negativo, essendo l'esito dell'operazione lo stesso nell'uno, e nell'altro caso. In fatti si ponga $y = -4a$, sarà $u = 2aa$, $z = -3aa$, e le due equazioni le stesse di prima, cioè $xx - 4ax - 3aa = 0$, $xx + 4ax + 2aa = 0$.

Sia l'equazione $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0$;
$- ccxx$

togliendo il secondo termine colla sostituzione $x = z + \frac{a}{2}$, si muterà in $z^4 * + \frac{aazz}{2} - a^3z + \frac{5a^4}{16} = 0$.
$- cczz - accz - \frac{aacc}{4}$

Facendo per tanto il paragone di questa con l'equazione $z^4 * + uzz - pyz + pu = 0$, che è il prodotto delle due
$- yyzz + uyz$
$+ pzz$

$zz + yz + p = 0$, $zz - yz + u = 0$; al solito dal paragone de' terzi termini averemo $p = yy - u + \frac{aa}{2} - cc$, dal paragone de' quarti $u = p - \frac{a^3 - acc}{y}$, cioè, posto in luogo di $p$ il suo valore, $u = \frac{yy}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{cc}{2} - \frac{a^3 - acc}{2y}$, e però $p = \frac{yy}{2} + \frac{aa}{4} - \frac{cc}{2} + \frac{a^3 + acc}{2y}$, e finalmente dal paragone degl' ultimi termini averemo $pu = \frac{5a^4}{16} - \frac{aacc}{4}$, cioè, posti i valori di $p$, e di $u$,

$$y^6 + aay^4 - a^4yy - a^6 \atop - 2ccy^4 + c^4yy - 2a^4cc \atop - aac^4 = 0.$$

Ora i divisori dell' ultimo termine, intendendo di due dimensioni, sono $aa$, ed $aa + cc$, e la divisione succede per $yy - aa - cc = 0$, adunque sarà $yy = aa + cc$, ed $y = \pm \sqrt{aa + cc}$, e però $u = \frac{3aa}{4} - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}}$, $p = \frac{3aa}{4} + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}}$, e le due equazioni $zz + yz + p = 0$, e $zz - yz + u = 0$

saranno $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3aa}{4} + \frac{a^3 + acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0$,

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3aa}{4} - \frac{a^3 - acc}{2\sqrt{aa+cc}} = 0,$$

cioè $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3aa}{4} + \frac{a}{2}\sqrt{aa+cc} = 0$,

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3aa}{4} - \frac{a}{2}\sqrt{aa+cc} = 0,$$

e quali due equazioni risolute ci danno i quattro valori

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

rispetto alla prima;

e $z = \tfrac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$

rispetto alla seconda;

e per-

e perchè esse sono i divisori dell'equazione

$$\begin{array}{l} z^4 * + \frac{aazz}{2} - a^3z + \frac{5a^4}{16} \\ - cczz - accz - \frac{aacc}{4} \end{array} = 0,$$

le suddette radici saranno pure quelle della stessa equazione; ed essendo stata fatta la sostituzione di $x = \frac{a}{2} + z$,

saranno $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$,

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}},$$

che sono i quattro valori dell'equazione proposta

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0. \\ \qquad\qquad - ccxx \end{array}$$

168. Ma si può formare un canone, o sia formola generale sì per l'equazione trasformata, come per le due sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, che si assumono a fine di avere i divisori, alle quali formole rapportarsi universalmente, qualunque siasi l'equazione del quarto grado, a cui manchi, o sia tolto il secondo termine. Sia adunque l'equazione generale $x^4 * \pm pxx \pm qx \pm r = 0$. Prese le due sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, e fattone il prodotto

$$\begin{array}{l} x^4 * + zxx \\ \quad - yyxx - yzx + uz \\ \quad + uxx + uyx \end{array} = 0;$$

si

si paragoni termine per termine colla proposta, e dal paragone de' terzi termini troverassi $z = \pm p + yy - u$; dal paragone de' quarti $u = z \pm \frac{q}{y}$, e sostituito in luogo di $z$ il suo valore, sarà $u = \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y}$; cioè $+p$ se nella proposta il terzo termine è positivo, e $-p$ se è negativo; e così nello stesso modo $+q$ se è positivo il quarto, e $-q$ se è negativo; e questo posto in luogo di $u$ nel primo paragone, averassi $z = \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y}$; cioè $+p$ se è positivo il terzo termine della proposta, e $-p$ se è negativo; e per l'opposto $-q$ se è positivo il quarto, e $+q$ se è negativo; dal paragone degl' ultimi troverassi $zu = \pm r$, cioè $\overline{\pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y}} \times \overline{\pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y}} = \pm r$, e facendo l'attuale moltiplicazione, e riducendo al comune denominatore, $y^6 \pm 2py^4 + ppyy - qq = 0$, equazione
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mp 4ryy$

trasformata, che può dirsi cubica, nella quale sarà $+2p$ se il terzo termine della proposta sia positivo, e $-2p$ se sia negativo; e sarà $-4r$ se l'ultimo della proposta sia positivo, e $+4r$ se sia negativo. Se nelle due equazioni sussidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$ in luogo di $z$, ed $u$ si porranno i valori di sopra ritrovati, fa-

ran-

ranno esse $xx + yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y} = 0$, ed $xx - yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y} = 0$, quindi se l'equazione trasformata sarà divisibile per $yy \pm$ un divisore di due dimensioni dell' ultimo termine, avrassi il valore della $y$, che sostituito nelle due $xx + yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \mp \frac{q}{2y} = 0$, $xx - yx \pm \frac{p}{2} + \frac{yy}{2} \pm \frac{q}{2y} = 0$, ci somministrerà i divisori della proposta $x^4 * \pm pxx \pm qx \pm r = 0$, e se la trasformata non sarà divisibile, nè meno lo sarà la proposta.

Sia l'equazione $x^4 * - 4aaxx - 8a^3x + 35a^4 = 0$; riferendo questa alla canonica $x^4 * \pm pxx \pm qx \pm r = 0$, sarà $p = 4aa$, $q = 8a^3$, $r = 35a^4$, e però la trasformata sarà

$$\begin{array}{l} y^6 - 8aay^4 + 16a^4yy - 64a^6 = 0, \\ \phantom{y^6 - 8aay^4} - 140a^4yy \end{array}$$

cioè $y^6 - 8aay^4 - 124a^4yy - 64a^6 = 0$, e le due sussidiarie saranno $xx + yx - 2aa + \frac{yy}{2} + \frac{4a^3}{y} = 0$, $xx - yx - 2aa + \frac{yy}{2} - \frac{4a^3}{y} = 0$; ma poichè la trasformata (ritrovati i divisori dell'ultimo termine) è divisibile per $yy - 16aa$, averemo $yy = 16aa$, ed $y = 4a$, i quali valori sostituiti nelle due sussidiarie daranno $xx + 4ax + 7aa = 0$, $xx - 4ax + 5aa = 0$, che sono i divisori della proposta $x^4 * - 4aaxx - 8a^3x + 35a^4 = 0$, le di cui quattro radici

dici $x = -2a \pm \sqrt{-3aa}$, $x = 2a \pm \sqrt{-aa}$ tutte immaginarie.

169. Alle volte il solo togliere dall' equazione il secondo termine basta per ridurla ad essere piana, e così risparmiare tutte l' altre operazioni. Tale sarebbe, per esempio, l'equazione $x^4 + 2cx^3 \begin{matrix} -2acxx \\ +ccxx \end{matrix} -2aacx - aacc = 0$,
la quale, giacchè non è riducibile per alcun divisore dell' ultimo termine, togliendo il secondo termine col fare

$x = y - \frac{c}{2}$, si muta in questa

$$y^4 * \begin{matrix} -2aayy \\ -\frac{ccyy}{2} \end{matrix} * \begin{matrix} +\frac{c^4}{16} \\ -\frac{aacc}{2} \end{matrix} = 0,$$

quadratica affetta, le di cui radici diminuite della quantità $\frac{c}{2}$, per la sostituzione $x = y - \frac{c}{2}$, saranno quelle della proposta.

170. Esigge questo metodo, che si tolga dall' equazione il secondo termine, nè si estende oltre le equazioni del quarto grado; eccone adunque un' altro, che non obbliga a levare termine alcuno, e può applicarsi tanto alle equazioni del quarto grado, come a quelle del quinto, e sesto, e talora a quelle di grado superiore ancora. Sia l' equazione $x^4 + ax^3 \begin{matrix} +aaxx \\ -abxx \end{matrix} -aabx - a^3b = 0$,

si

ſi prendano due equazioni ſuſſidiarie del ſecondo grado $xx+yx+u=0$, $xx+fx+z=0$, nelle quali le $y$, $u$, $f$, $z$ ſono indeterminate da fiſſarſi nel progreſſo, e ſe ne faccia il prodotto

$$\begin{matrix} x^4+yx^3+uxx+ufx+zu \\ +fx^3+fyxx+zyx \\ +zxx \end{matrix} = 0,$$

che ſi paragoni termine per termine con l'equazione propoſta. Dal paragone de' ſecondi termini troveraſſi $f=a-y$; dal paragone degl'ultimi $z=-\frac{a^3b}{u}$; e dal paragone de' quarti $yz+fu=-aab$, e ſoſtituendo in luogo di $f$, e di $z$ i ſuoi valori $a-y$, $-\frac{a^3b}{u}$ a fine di avere un'equazione eſpreſſa con le ſole $y$, $u$, e le cognite, ſarà $y=\frac{auu+aabu}{uu+a^3b}$. E perchè ſi è trovato dal paragone degl'ultimi termini $zu=-a^3b$, dovrà eſſere $u$ un diviſore di $-a^3b$; adunque ſi trovino i diviſori di due dimenſioni di $-a^3b$ (giacchè quelli di una, e di tre non ſervono, per eſſere le equazioni ſuſſidiarie del ſecondo grado) che ſono $\pm ab$, $\pm aa$. Si cominci a prendere in luogo di $u$ uno dei diviſori, per eſempio $ab$, che ſoſtituito nell'equazione $y=\frac{auu+aabu}{uu+a^3b}$, ci dà $y=\frac{2ab}{a+b}$, quindi poſti queſti valori di $y$, e di $u$ nell'equazione ſuſſidiaria $xx+yx+u=0$, ſarà eſſa $xx+\frac{2abx}{a+b}+ab=0$,

e per essa si tenti la divisione dell' equazione proposta, e se questa succeda, sarà $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$ un divisore, ed il quoziente l'altro; ma poichè non succede la divisione, si tenti, prendendo in luogo di $u$ l'altro divisore $-ab$ dell' ultimo termine, e sarà $y = 0$, e però l'equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$ sarà $xx - ab = 0$, per cui divisa la proposta, succede esatta la divisione dandoci di quoziente $xx + ax + aa = 0$; adunque i divisori dell' equazione proposta $x^4 + ax^3 + aaxx - abxx - aabx - a^3b = 0$ sono $xx - ab = 0$, $xx + ax + aa = 0$.

Anche prendendo in luogo di $u$ il divisore $aa$ dell' ultimo termine, per cui si trova $y = a$, e l'equazione sussidiaria $xx + ax + aa = 0$, succede la divisione dandoci di quoziente $xx - ab = 0$, cioè gli stessi divisori di prima.

Che se provati tutti i divisori dell' ultimo termine in luogo di $u$, per nessuno succede l'operazione, l'equazione proposta non può, almeno con questo metodo, abbassarsi, ed il problema rimane di quel grado, che mostra l'equazione.

Ma senza tentare la divisione, si potrebbe anco, preso in luogo di $u$ ciascuno de' divisori di due dimensioni dell' ultimo termine, ed i corrispondenti valori di $y$, $f$, $z$, sostituirli in luogo loro nelle formole sussidiarie $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$; e se il prodotto di queste ci darà l'equazione proposta, saranno esse i divi-

sori

ſori cercati. Così preſo in luogo di $u$ il diviſore $-ab$, ſi à $y=0$, e però $f=a$, $z=aa$, e le due equazioni ſuſſidiarie ſaranno $xx-ab=0$, $xx+ax+aa=0$, il prodotto delle quali forma l'equazione propoſta.

Sia l'equazione $\begin{matrix} x^4-2ax^3+2aaxx-2a^3x+a^4=0. \\ -ccxx \end{matrix}$

Si paragoni queſta col prodotto

$$\begin{matrix} x^4+yx^3+uxx+fux+zu \\ +fx^3+fyxx+zyx \quad =0 \\ +zxx \end{matrix}$$

delle due ſolite equazioni ſuſſidiarie $xx+yx+u=0$, $xx+fx+z=0$. Dal paragone de' ſecondi termini caveraſſi $f=-2a-y$; dal paragone degl' ultimi $z=\frac{a^4}{u}$. Si prenda il paragone de' terzi, e non de' quarti per avere il valore della $y$ dato anche per la $c$ (la quale lettera deve eſſere neceſſariamente ne' diviſori, il che non potraſſi avere dal paragone de' quarti) ſarà adunque $u+fy+z=2aa-cc$, e poſti i valori di $f$, e di $z$, ſarà $yy+2ay=\frac{a^4}{u}-2aa+cc+u$, in cui ſoſtituito in luogo di $u$ uno de' diviſori $\pm aa$ dell'ultimo termine, per eſempio $+aa$, e riſoluta l'equazione, ſarà $y=-a\pm\sqrt{aa+cc}$, e poſti nell'equazione $xx+yx+u=0$ i valori della $u$, e della $y$ (preſo per la quantità radicale il ſegno o poſitivo, o negativo, come più ſi vuole, perchè in fine

 tor-

torna lo ſteſſo, come ſi può vedere calcolando nell'uno, e nell'altro modo) averaſſi $xx - ax + x\sqrt{aa+cc} + aa = 0$, per cui ſuccede la diviſione della propoſta equazione, dando di quoziente $xx - ax - x\sqrt{aa+cc} + aa = 0$, ed in conſeguenza le quattro radici dell'equazione propoſta ſaranno

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$$

$$x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} \pm \sqrt{-\frac{aa}{2} + \frac{cc}{4} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Sia l'equazione $x^4 + 2bx^3 + bbxx - a^3b = 0$; ſi paragoni col prodotto

$$\begin{array}{l} x^4 + yx^3 + uxx + sux + zu \\ \quad + sx^3 + syxx + zyx \qquad = 0 \\ \qquad + zxx \end{array}$$

delle due ſolite formole ſuſſidiarie $xx + yx + u = 0$, $xx + sx + z = 0$. Dal paragone de' ſecondi termini avremo $s = 2b - y$; dal paragone degl'ultimi, $z = -\frac{a^3b}{u}$; dal paragone de' quarti caveremo $zy + su = 0$, e poſti i valori di $s$, e di $z$, ſarà $-\frac{a^3by}{u} + 2bu - uy = 0$, cioè $y = \frac{2buu}{a^3b + uu}$. Ma preſo ciaſcuno de' diviſori razionali $\pm aa$, $\pm ab$ dell'ultimo termine, e poſto in luogo di $u$, e fatto il rimanente al ſolito, non ſuccede l'operazione; adunque ſi tenti per mezzo de' diviſori irrazionali $\pm a\sqrt{ab}$

dell'

dell'ultimo termine, e però posto in luogo di $u$ il divisore irrazionale $a\sqrt{ab}$, sarà $y=b$, quindi l'equazione sussidiaria $xx+yx+u=0$ verrà ad essere $xx+bx+a\sqrt{ab}=0$, per cui divisa la proposta darà di quoziente $xx+bx-a\sqrt{ab}=0$.

171. Intorno alle equazioni del quinto grado è chiaro, che se elle non sono divisibili per un divisore lineare, come già suppongo, non potranno esserlo se non per uno del secondo grado, ed uno del terzo. Per tali equazioni adunque si prendano due equazioni sussidiarie, del terzo grado l'una, e l'altra del secondo, ed il prodotto di queste si paragoni termine per termine colla proposta equazione in simil modo, come sopra.

Sia adunque l'equazione

$$x^5-4ax^4+6aax^3-8a^3xx+5a^4x-a^5=0;$$

si prendano le due sussidiarie $xx+yx+u=0$, $x^3+txx+fx+z=0$, e se ne faccia il prodotto

$$\begin{array}{l} x^5+yx^4+ux^3+tuxx+fux+zu \\ \quad +tx^4+tyx^3+fyxx+zyx \quad =0, \\ \quad +fx^3+zxx \end{array}$$

che si paragoni colla proposta equazione, e dal paragone de' secondi termini si avrà $t=-4a-y$, dal paragone degl'ultimi $z=-\frac{a^5}{u}$, dal paragone de' quinti $f=\frac{5a^4-zy}{u}$, e sostituito il valore di $z$, $f=\frac{5a^4}{u}+\frac{a^5y}{uu}$; dal paragone

de'

de' terzi finalmente avrassi $u + ty + f = 6aa$, e posti in luogo di $t$, e di $f$ i loro valori, per avere un equazione con le sole $y$, ed $u$, e le cognite, sarà $yy + 4ay - \frac{a^5 y}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$. E perchè dal paragone degl' ultimi termini abbiamo $z = -\frac{a^5}{u}$, sarà $u$ un divisore di $-a^5$, onde ritrovati tutti i divisori di due dimensioni di $-a^5$, si sostituiscano ad uno ad uno nell' equazione $yy + 4ay - \frac{a^5}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$ a fine di avere il valore della $y$, e questo si ponga in luogo della $y$ nell' equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$, siccome il valore di $u$; e se per questa succede la divisione dell' equazione proposta, averemo l' intento. Sono adunque i divisori di due dimensioni dell' ultimo termine $\pm aa$. Si prenda $+aa$, e si sostituisca in luogo di $u$ nell' equazione $yy + 4ay - \frac{a^5 y}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$, da cui si ricava $yy + 3ay = 0$, cioè $y = 0$, ed $y = -3a$. Se nell' equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$, posto in luogo di $u$ il divisore $+aa$, in oltre si ponga in luogo della $y$ il zero, che è uno de' valori ritrovati, sarà $xx + aa = 0$, ma per questa non succede la divisione della proposta equazione, adunque si ponga in luogo

di

di $y$ l'altro valore $-3a$, ed averemo $xx - 3ax + aa = o$, per cui fuccede la divifione, dandoci di quoziente $x^3 + axx + 2aax - a^3 = o$. Se l'operazione non foffe fucceduta per mezzo del divifore $+aa$, averebbefi provato il divifore $-aa$; che fe nè meno per quefto fi aveffe avuto l'intento, l'equazione farebbe, almeno con quefto metodo, irriducibile.

Sia l'equazione $x^5 + ax^4 * + a^3xx - aabbx - a^4b = o$,
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -aabxx$

che fi paragoni termine per termine col prodotto delle due folite fuffidiarie, e dal paragone de' fecondi termini troveremo $t = a - y$; dal paragone degl' ultimi $z = -\frac{a^4b}{u}$; dal paragone de' quinti $fu + zy = -aabb$, e foftituito in luogo di $z$ il fuo valore, farà $f = -\frac{aabb}{u} + \frac{a^4by}{uu}$; dal paragone de' terzi avremo $u + ty + f = o$, in cui pofti in luogo di $t$, e di $f$ i loro valori, farà $yy - ay - \frac{a^4by}{uu} = uu - \frac{aabb}{u}$. I divifori di due dimenfioni di $a^4b$ fono $\pm aa$, $\pm ab$. Si tenti l'operazione per mezzo del divifore $-ab$, e però pofto in luogo di $u$ il valore $-ab$ nell'ultima equazione $yy - ay - \frac{a^4by}{uu} = uu - \frac{aabb}{u}$, farà $yy - ay - \frac{aay}{b} = o$, e però $y = o$, ed $y = \frac{ab + aa}{b}$.

Si

Si sostituisca nell' equazione sussidiaria $xx + yx + u = 0$ il valore $\frac{aa + ab}{b}$ in luogo di $y$, e $-ab$ in luogo di $u$, e sarà $xx + \frac{abx + aax}{b} - ab = 0$, per cui non succede la divisione; si prenda adunque l'altro valore della $y$, cioè il zero, ed è l'equazione sussidiaria $xx - ab = 0$, per cui succede la divisione dell' equazione proposta, dando di quoziente $x^3 + axx + abx + a^3 = 0$.

Era arbitrario instituire il paragone de' quarti termini, ma per maggiore semplicità ô presi i terzi.

172. Le equazioni del sesto grado, supposte non riducibili per alcun divisore lineare, non lo potranno altresì essere, se non o per tre divisori di due dimensioni, o per uno di due, ed uno di quattro, o per due di tre, ma basterà cercare i due casi, ne' quali sono riducibili per due di tre, o per uno di due, ed uno di quattro; giacchè riducendole per uno di due, la ridotta sarà di quattro dimensioni, che si potrà poi ridurre per due divisori di due dimensioni, se la proposta è riducibile per tre di due dimensioni.

Sia l'equazione $x^6 - 13ax^5 + 45aax^4 - 71a^3x^3 + 57a^4xx - 16a^5x + 2a^6 = 0$, che si cerchi di ridurre per una di due dimensioni, ed una di quattro. Si prendano adunque le due sussidiarie $xx + yx + u = 0$, ed $x^4 + px^3 + txx + fx + z = 0$, e se ne faccia il prodotto

$x^6 +$

$$\left.\begin{array}{l} x^6 + px^5 + tx^4 + ſx^3 + zxx + zyx + zu \\ yx^5 + pyx^4 + tyx^3 + ſyxx + ſux \\ + ux^4 + pux^3 + tuxx \end{array}\right\} = 0;$$

dal paragone de' ſecondi termini caveremo $p = -13a - y$; dal paragone degl' ultimi $z = \frac{2a^6}{u}$; dal paragone de' terzi $t + py + u = 45aa$, e ſoſtituendo il valore di $p$, ſarà $t = 45aa + 13ay + yy - u$; dal paragone de' ſeſti $zy + ſu = -16a^5$, e poſto il valore di z, ſarà $ſ = -\frac{2a^6y}{uu} - \frac{16a^5}{u}$; dal paragone de' quinti $z + ſy + tu = 57a^4$, e ſoſtituendo i valori di $z$, $ſ$, e $t$ a fine di avere un equazione data per le ſole $u$, $y$, e per le cognite dell'equazione propoſta, ſarà finalmente $\frac{2a^6}{u} - \frac{2a^6yy}{uu} - \frac{16a^5y}{u} + 45aau + 13ayu + uyy - uu = 57a^4$, cioè

$$yy - \frac{16a^5uy + 13au^3y + 2a^6u - 57a^4uu + 45aau^3 - u^4}{u^3 - 2a^6} = 0;$$

e poichè i diviſori di due dimenſioni dell'ultimo termine $2a^6$ ſono $\pm aa$, $\pm 2aa$; ſi provi ponendo in queſt' ultima equazione in luogo di $u$ il diviſore $+ aa$, e ſarà $yy + 3ay + 11aa = 0$, che riſoluta ci dà $y = \frac{-3a \pm \sqrt{-35aa}}{2}$, quindi la formola ſuſſidiaria $xx + yx + u = 0$ ſarà $xx - \frac{3ax + x\sqrt{-34aa}}{2} + aa = 0$; ma per queſta, comunque prendaſi l'alternativa de' ſegni nel radicale, non è divi-

 ſibile

ſibile la equazione propoſta, ſiccome nè pure rieſce prendendo il diviſore $-aa$; adunque ſi prenda $+2aa$, ed avremo $yy+12ay+20aa=0$, cioè $y=-6a\pm 4a$, vale a dire $y=-10a$, ed $y=-2a$. Si prenda $y=-10a$, e ſi ponga nella formola ſuſſidiaria $xx+yx+u=0$ in luogo della $y$ il valore $-10a$, e $+2aa$ in luogo di $u$, ſarà $xx-10ax+2aa=0$, ma per eſſa non ſuccede la diviſione della propoſta; onde ſi prenda l'altro valore della $y$, cioè $-2a$, e la formola è $xx-2ax+2aa=0$, per cui ſuccede la diviſione dandoci di quoziente

$$x^4-11ax^3+21aaxx-7a^3x+a^4=0.$$

Quì è il luogo di avvertire, che ſe in vece del paragone de' quinti termini, aveſſi preſo il paragone de' quarti, mi ſarei incontrata nell' equazione cubica $2y^3+26ayy+81aay+74a^3=0$; ed il paragone de' quinti mi â portata ad equazione quadratica, dal che ſi vede, che la ſcelta del paragone di tali termini piuttoſto, che d'altri, può recare molto vantaggio. Non è però, che non poteſſe ſervire anche l'equazione cubica $2y^3+26ayy+81aay+74a^3=0$, poichè ritrovando di queſta le radici, che ſono $y+2a=0$; $y+\frac{11a}{2}\pm\frac{\sqrt{47aa}}{2}=0$, una di queſte, cioè $y=-2a$ mi dà la medeſima equazione $xx-2ax+2aa=0$, per cui ſi divide la propoſta. Sia l'equazione del ſeſto grado

$$x^6+3ax^5+4aax^4+6a^3x^3+6a^4xx+3a^5x+2a^6=0$$

non riducibile per diviſore di due dimenſioni; ſi tenti

adun-

adunque la riduzione per due di tre, e si prendano le due equazioni sussidiarie $x^3 + yxx + px + u = 0$,
$x^3 + txx + sx + z = 0$,
e se ne faccia il prodotto

$$\begin{array}{l} x^6 + yx^5 + px^4 + ux^3 + tuxx + suz + zu \\ \quad + tx^5 + tyx^4 + ptx^3 + psxx + pzx \\ \qquad + sx^4 + syx^3 + zyxx \\ \qquad\quad + zx^3 \end{array} = 0.$$

Dal paragone de' secondi termini caverassi $t = 3a - y$; dal paragone degl'ultimi $z = \frac{2a^6}{u}$; dal paragone de' sesti $su + pz = 3a^5$, e ponendo il valore di $z$, sarà $s = \frac{3a^5}{u} - \frac{2a^6 p}{uu}$; dal paragone de' terzi $p + ty + s = 4aa$, e sostituiti i valori di $t$, e di $s$, sarà $p = \frac{4aauu - 3a^5 u + uuyy - 3auuy}{uu - 2a^6}$; dal paragone de' quarti $u + pt + sy + z = 6a^3$, e sostituendo in luogo di $t$, $s$, $z$ i loro valori a fine di avere un'altro valore di $p$ dato per le $y$, $u$, e le note dell'equazione proposta, sarà $p = \frac{6a^3 uu - u^3 - 3a^5 uy - 2a^6 u}{3auu - uuy - 2a^6 y}$.

Tra questi due valori di $p$ s'instituisca un'equazione per ricavarne il valore della $y$ dato per le sole $u$, e le cognite, ed è

$$\frac{4aauu - 3a^5 u - 3auuy + uuyy}{uu - 2a^6} = \frac{6a^3 uu - u^3 - 3a^5 uy - 2a^6 u}{3auu - uuy - 2a^6 y},$$

e riducendo al comune denominatore, ed ordinando l'e-

 qua-

quazione per la $y$, farà

$$\frac{y^3 \quad -6a^7uyy + 8a^8uy - 6a^3u^3 - 6au^3yy - 6a^5uuy + 9a^6uu + 13aau^3y - 12a^9u + 4a^{12} - u^4}{u^3 + 2a^6u} = 0 .$$

E perchè fi â $uz = 2a^6$, farà $u$ un divifore di $2a^6$; ma i divifori di tre dimenfioni di $2a^6$ fono $\pm a^3$, $\pm 2a^3$; quindi prefo uno di effi, cioè $+a^3$ in luogo di $u$, fi ponga nell'ultima equazione, ed averaffi $y^3 - 4ayy + 5aay - 2a^3 = 0$. Da quefta fi cavino i valori della $y$, cioè uno $y = 2a$, e gl'altri due, che fono eguali, $y = a$. Si faccia ufo del primo valore $y = 2a$, che foftituito in una delle equazioni di $p$ in luogo di $y$, e pofto in luogo di $u$ il divifore $a^3$, farà $p = aa$, quindi pofti quefti valori di $y$, $p$, ed $u$ nella formola fuffidiaria $x^3 + yxx + px + u = 0$, farà effa $x^3 + 2axx + aax + a^3 = 0$, per cui divifa l'equazione propofta ci dà il quoziente $x^3 + axx + aax + 2a^3 = 0$. Se la divifione non foffe fucceduta prendendo $y = 2a$, averei prefo $y = a$. Che fe nè meno per quefto aveffi avuto l'intento, avrei tentato per mezzo di ciafcuno degl'altri divifori, ripetendo le medefime operazioni; e fe per neffuno foffe riufcita la facenda, la propofta equazione non avrebbe potuto abbafsarfi, almeno con quefto metodo, e farebbe rimafta del fefto grado.

Sia

Sia l'equazione $x^6 + ax^5 + aax^4 + 3a^3x^3 + a^4xx + a^5x + 2a^6 = 0$, che si paragoni col prodotto delle due sussidiarie, come nell'esempio antecedente. Dal paragone de' secondi termini averemo $t = a - y$; dal paragone degl'ultimi $z = \frac{2a^6}{u}$; dal paragone de' sesti $fu + pz = a^5$, e posto in luogo di $z$ il suo valore, sarà $f = \frac{a^5}{u} - \frac{2a^6 p}{uu}$; dal paragone de' terzi $p + ty + f = aa$, e posti i valori di $t$, e di $f$, $p = \frac{aauu - auuy + uuyy - a^5u}{uu - 2a^6}$; dal paragone de' quarti $u + pt + fy + z = 3a^3$, e sostituiti i valori di $z$, $f$, $t$ per avere un'altra equazione di $p$ data per le sole $u$, $y$, e le note, sarà $p = \frac{3a^3uu - a^3uy - 2a^6u - u^3}{auu - uuy - 2a^6y}$, ed instituendo fra questi valori di $p$ un'equazione per avere il valore della $y$ dato per la sola $u$, e le cognite, fatte le debite operazioni, sarà

$$y^3 \frac{\begin{array}{r} - 2au^3yy + 2aau^3y + 2a^3u^3 \\ - 2a^7uyy - 2a^5uuy + a^6uu \\ + 2a^8uy - 6a^9u \\ - u^4 \\ + 4a^{12} \end{array}}{u^3 + 2a^6u} = 0.$$

I divisori di tre dimensioni di $2a^6$ sono $\pm a^3$, $\pm 2a^3$. Si prenda in luogo di $u$ il divisore $+ a^3$, che si ponga in quest' ultima equazione, e si riduce ad esse-

re $y^3 - \frac{4a^{10}yy + 2a^{11}y}{3a^9} = 0$, e dividendo per $y$, sarà $y = 0$, ed $yy - \frac{4ay + 2aa}{3} = 0$, cioè $y = \frac{2a \pm \sqrt{-2aa}}{3}$. Di questi tre valori della $y$ si prenda il primo, cioè $y = 0$, e si sostituisca in luogo di $y$ in una delle due equazioni di $p$, ed $a^3$ in luogo di $u$, e sarà $p = 0$; adunque l'equazione sussidiaria $x^3 + yxx + px + u = 0$ sarà $x^3 + a^3 = 0$, per cui divisa l'equazione proposta ci dà di quoziente $x^3 + axx + aax + 2a^3 = 0$.

In queste tali equazioni se prima si sapesse, che sono divisibili per un divisore, in cui manchi qualche termine, si potrebbe risparmiare molta fatica col prendere una delle due equazioni sussidiarie mancante pure dello stesso termine, ma poichè ciò non si sa, si suole provare l'operazione primieramente con una di esse equazioni sussidiarie mancante o d'uno, o di un'altro, o di più termini; tuttavia però, perchè l'opera è gettata se la proposta equazione non è in questo modo riducibile, e bisogna in fine, ciò non ostante, ricorrere alle equazioni sussidiarie compite, è meglio servirsi di queste sul bel principio, giacchè ci danno i divisori per l'uno, e l'altro caso.

Senza ripetere le operazioni ad ogni esempio avrei potuto formare il canone generale, a cui rapportare ogni particolare equazione in simil guisa a quello del

num.

num. 168., ma oltre che ciò suole cagionare della confusione, pare, che le attuali operazioni fatte in proposito diano maggior lume, e facciano migliore effetto, quindi ad esse piuttosto mi sono attenuta.

173. Lo stesso metodo si può proporzionalmente applicare alle equazioni di grado superiore, ma il calcolo cresce a dismisura; perchè se si debba ridurre un' equazione, per esempio, dell'ottavo grado per mezzo di due del quarto, nelle quali non manca alcun termine, ciascuna delle due equazioni sussidiarie avrà quattro indeterminate, onde considerata una di queste equazioni, come sarebbe $x^4 + yx^3 + pxx + qx + u = 0$, e preso per la $u$ uno de' divisori dell'ultimo termine della proposta, rimangono tre indeterminate $y$, $p$, $q$ da fissarsi coi soliti paragoni, nel che s'incontrano equazioni solide, delle quali però avendosi le radici, l'operazione può procedere.

## PROBLEMA I.

174. *Ritrovare quattro numeri, i quali si superino dell'unità, ed il prodotto loro sia* 100.

Sia il primo numero $= x$, il secondo sarà $= x + 1$, il terzo $= x + 2$, il quarto $= x + 3$; adunque dovrà essere il prodotto loro $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x = 100$, cioè $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 = 0$; e perchè questa equazione

zione non è divisibile per alcun divisore dell'ultimo termine, si faccia sparire il secondo con la sostituzione di $x = z - \frac{3}{2}$, e nasce l'equazione $z^4 - \frac{5zz}{2} - \frac{1591}{16} = 0$, che è quadratica affetta, le di cui radici sono $zz = \frac{5}{4} \pm \sqrt{101}$, e però $z = \pm \sqrt{\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}}$, quindi averassi $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} \pm \sqrt{101}}$; e però de' quattro valori della $x$ due sono reali, cioè $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$, gli altri due immaginarj. Se ne prenda uno reale $-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ per il primo numero de' quattro cercati; sarà $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il secondo; $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il terzo; $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il quarto; il prodotto de' quali è $= 100$. Si prenda l'altro valore reale di $x$ cioè $-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ per il primo numero; sarà $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il secondo; $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il terzo; $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ il

quar-

quarto, il prodotto de' quali dà parimente il numero 100.

## PROBLEMA II.

175. *Nel triangolo rettangolo* ABC *dato il lato minore* AB, ( *Fig.* 91. ) *ed abbaſſato il perpendicolo* BD *alla baſe* AC, *e data la differenza de' ſegmenti* AD, DC *della ſteſſa baſe* AC; *ritrovare la differenza* FC *de' lati* BA, BC.

Col centro $B$, intervallo $BA$, ſi deſcriva il circolo $AEFG$, e ſia $BA=a$, $EC=b$, differenza data de' ſegmenti $AD$, $DC$, e ſia $FC$ differenza cercata $=x$; ſarà. $GC=2a+x$, e per la proprietà del circolo, $GC\times CF=AC\times CE$, cioè $2ax+xx=AC\times b$, e però $AC=\frac{2ax+xx}{b}$; ma eſſendo retto l'angolo $ABC$, avraſſi l'equazione $\frac{4aaxx+4ax^3+x^4}{bb}=2aa+2ax+xx$, o ſia $x^4+4ax^3+4aaxx-2abbx-2aabb \atop -bbxx$ $=0$, la quale non è diviſibile per alcun diviſore dell'ultimo termine, e però ſi levi il ſecondo termine, facendo $x=z-a$, ed avraſſi la quadratica affetta $z^4-2aazz+a^4 \atop -bbzz\ -aabb$ $=0$, quindi

di $zz = \frac{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}{2}$, e $z = \pm\sqrt{\frac{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}{2}}$

onde $x = -a \pm \sqrt{\frac{2aa + bb \pm \sqrt{8aabb + b^4}}{2}}$, o sia

$x = -a \pm \sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$; quattro radici tutte reali, quando sia $a$ maggiore di $b$. La radice $x = -a + \sqrt{aa + \frac{bb}{2} + b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$, che è positiva, serve per il problema proposto; la radice $x = -a + \sqrt{aa + \frac{bb}{2} - b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$, che è negativa, serve quando il lato $BC$ sia minore del lato $AB$; le altre due servono per l'angolo $ABG$.

## PROBLEMA III.

176. *Dato il quadrato* AD, (*Fig.* 92.) *ritrovare nel lato prodotto* AC *il punto* E *tale, che condotta all' angolo* B *la retta* EB, *sia l' intercetta* EF *eguale ad una data retta linea* c.

Chiamata $BD = a$, $DF = x$, sarà $CF = a - x$, e condotta $BFE$, sia $FE = c$; per la similitudine de' triangoli

goli $ECF$, $BDF$, ſarà $CF$ $(a-x)$, $FE$ $(c)$ :: $FD$ $(x)$, $FB$ $(\frac{cx}{a-x})$; ma per l'angolo retto $D$ ſarà anche $FB=\sqrt{aa+xx}$, adunque averaſſi l'equazione $\sqrt{aa+xx}=\frac{cx}{a-x}$, e quadrando, $\frac{ccxx}{aa-2ax+xx}=aa+xx$, e riducendo al comune denominatore, ed ordinando l'equazione, ſarà $x^4-2ax^3+2aaxx-2a^3x+a^4=0$, le di
$$\phantom{x^4-2ax^3+}-ccxx$$
cui radici ſi è veduto ai numeri 167., e 170., eſſere

$$x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}\pm\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

$$x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}\pm\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Le due ultime radici ſono ſempre reali, e poſitive, l'una $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, che è minore di $a$, ci determina il punto $F$, per cui condotta la linea $BE$, ſarà $EF$ eguale alla data $c$, e ſciolto il problema propoſto. L'altra radice $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{\frac{cc}{4}-\frac{aa}{2}+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, che è maggiore di $a$, determina il punto $f$; a cui condotta la retta $Bf$, ci dà pure $ef$ eguale alla data, e ſerve ſe il problema foſſe ſtato propoſto per l'angolo $ACf$.

Le due prime radici sono immaginarie, qualunque volta sia $cc$ minore di $8aa$, ed il problema impossibile. Posta adunpue $cc$ non minore di $8aa$, le due radici sono reali, e negative, quindi presa $DG = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$, e $Dg = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{\frac{cc}{4} - \frac{aa}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$, e condotte per lo punto $B$ le rette $GM$, $gm$, saranno esse ambe eguali alla data $c$; e servirebbero, se il problema fosse stato proposto per l'angolo $ACD$.

177. Molte volte quando il problema non è di natura sua solido, ma piano, se ci comparisce sotto un' equazione solida ponendo per incognita una tal linea, ci può comparire sotto equazione piana prendendo altra linea per incognita. Ne prendo un'esempio nel problema antecedente, in cui denominando $DF = x$, si è ritrovata un' equazione del quarto grado, per cui si â dovuto fare la fatica di ridurla. Ma se supponendo $E$ il punto cercato, (*Fig.* 93.) si condurrà $ER$ normale a $BE$, che incontri in $R$ la $BD$ prodotta, ed $EL$ normale a $BR$, e chiamerassi $DR = x$, e come sopra $BD = a$, $FE = c$, e $BF = y$, altra incognita da eliminarsi in appresso, sarà $BR = a + x$, $BE = c + y$. Ora per i triangoli simili $BDF$, $ELR$, sarà $ER = y$, perchè è $EL = CD = BD$; e per i trian-

triangoli simili $BRE$, $ERL$, sarà $BR$, $BE::ER$, $EL$, adunque sarà $a+x$, $c+y::y$, $a$; quindi $cy+yy=aa+ax$. Ma per l'angolo retto $BER$, il quadrato di $BR$ è eguale alla somma de' quadrati di $BE$, e di $ER$, cioè $aa+2ax+xx=2yy+2cy+cc$, dunque ponendo in luogo di $cy+yy$ il valore $aa+ax$, sarà l'equazione $aa+2ax+xx=2aa+2ax+cc$, cioè $x=\pm\sqrt{aa+cc}$.

In un' altro modo ancora. Divisa per metà la $FE$ in $H$, e chiamata $CD=a$, sia $2c$ la data linea, a cui deve essere eguale la $FE$, e si chiami $BH=x$, sarà $BF=x-c$, e $BE=x+c$; ma $\overline{BE}^2-\overline{AB}^2=\overline{AE}^2$, dunque sarà $AE=\sqrt{xx+2cx+cc-aa}$. Ora per i triangoli simili $BDF$, $BEA$, sarà $BF\ (x-c)$, $BD\ (a)$ :: $BE(x+c)$, $AE(\sqrt{xx+2cx+cc-aa})$, quindi $ax+ac=\overline{x-c}\sqrt{xx+2cx+cc-aa}$, e quadrando, ed ordinando l'equazione, sarà finalmente

$$\left.\begin{array}{l} x^4-2aaxx-2aacc \\ \quad -2ccxx+\ \ c^4 \end{array}\right\}=0,$$

quadratica affetta, le di cui quattro radici sono

$$x=\pm\sqrt{aa+cc\pm a\sqrt{aa+4cc}}.$$

Istessamente se nel problema II. num. 175. in luogo di fare $FC=x$, (*Fig.* 91.) avessi denominata $BC=x$, ripetendo lo stesso discorso, avrei ritrovata l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} x^4-2aaxx+a^4 \\ \quad -bbxx-aabb \end{array}\right\}=0,$$

qua-

quadratica affetta, le di cui radici ſono

$$x = \pm \sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$$, che convengono con le prime.

Anco più ſemplicemente, ponendo $AE = x$, e ripetendo lo ſteſſo diſcorſo, avrebbeſi avuta l'equazione $xx + bx = 2aa$, e però $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}$, e perchè avrebbeſi trovata l'eſpreſſione $-a + \sqrt{bb + 2bx + xx - aa}$ per la $FC$; ponendo in luogo di $x$ il valore ritrovato, ſarebbeſi avuta la ricercata

$$FC = -a + \sqrt{aa + \frac{bb}{2} \pm b\sqrt{2aa + \frac{bb}{4}}}$$, come prima.

178. Un' altro artifizio ſi può tentare per ſimili problemi, quando ci portano a equazione ſolida, e che però tali non ſono di natura ſua; ed è, ritenuta la ſteſſa linea per incognita, per cui ſi è ritrovata la prima equazione, per mezzo d'altre proprietà ritrovare una ſeconda equazione, ed eguagliare l'una all'altra; dal paragone delle quali naſcerà una terza di grado inferiore. Eccone un' eſempio nel ſeguente problema.

PRO-

## PROBLEMA.

179. *Inscrivere in un dato circolo un settangolo.*

Sia (*Fig.* 94.) il dato circolo $ABFGCDE$, il di cui centro $H$, raggio $HA=r$, ed il lato del settangolo sia $AB=BF=FG$ ec. $=x$. Divisa per metà $AB$ in $I$, sarà $AI=\frac{1}{2}x=IB$, e condotta $IC$, che passerà necessariamente per lo centro $H$, sarà $HI=\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}$, $CI=r+\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}$, $CB=\sqrt{2rr+2r\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}}$. Si tirino $CE$, ed $HD$, saranno simili i triangoli $CDK$, $HAI$, a cagione dei due angoli retti $CKD$, $HIA$, e degl'angoli $DCK$, $AHI$, il primo de' quali, perchè insiste all'arco $DE$, sarà doppio dell'angolo $ACI$, che insiste alla metà di $DE$, e però eguale all'angolo $AHI$ doppio dello stesso $ACI$; e però avremo per la similitudine di essi triangoli, $CK=\frac{x\sqrt{rr-\frac{xx}{4}}}{r}=\frac{\sqrt{4rrxx-x^4}}{2r}$, $CE=\frac{\sqrt{4rrxx-x^4}}{r}$, ed $HK=\sqrt{rr-\frac{4rrxx+x^4}{4rr}}=\frac{2rr-xx}{2r}$; ma sono simili i triangoli $CEN$, $CHK$, essendo retti i due angoli $K$, $N$, ed eguali i due angoli $KCH$, $CEN$, perchè insistenti a due seg-

segmenti eguali, dunque sarà $CN = \frac{2rr - xx\sqrt{4rrxx - x^4}}{2r^3}$, e $CB = \frac{2rr - xx\sqrt{4rrxx - x^4}}{r^3}$, e però l'equazione

$$\sqrt{2rr + r\sqrt{4rr - xx}} = \frac{2rr - xx\sqrt{4rrxx - x^4}}{r^3}.$$

Quadrando adunque, sarà $2rr + r\sqrt{4rr - xx} = \frac{4r^4 - 4rrxx + x^4 \times 4rrxx - x^4}{r^6}$, e di nuovo quadrando, ed ordinando, avrassi $x^{14} - 16rrx^{12} + 104r^4x^{10} - 352r^6x^8 + 660r^8x^6 - 672r^{10}x^4 + 336r^{12}xx - 63r^{14} = 0$; ma quest' equazione è divisibile per $xx - 3rr = 0$. Fatta pertanto la divisione, avremo $x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12} = 0$, la quale non è divisibile per alcun divisore di due dimensioni, quindi pare che il problema sia del duodecimo grado. Sciolgo adunque il problema in altro modo, ritenendo la medesima incognita $x = AB = BF$ ec. Poichè nei triangoli $HCD$, $CDL$, l'angolo $CDH$ è comune, e l'angolo alla circonferenza $DCL$, che insiste all'arco $DA$, è eguale all'angolo al centro $DHC$, che insiste all'arco $CD$ metà di $DA$, saranno simili essi triangoli, e però avremo $DL = \frac{xx}{r}$, $LH = r - \frac{xx}{r}$. Ma l'angolo $DLC = DCH = EDH$, dunque l'angolo $HLM$, che è eguale all'angolo

lo al vertice $DLC$, sarà eguale all'angolo $EDH$, onde saranno parallele le due rette $LM$, $DE$, e simili i triangoli $HLM$, $HDE$, e però sarà $LM = \frac{rrx - x^3}{rr}$, ma $CL = CD = x$, (essendo il triangolo $LDC$ simile al triangolo isoscele $HDC$) e $CL = MA$, per essere eguali gl'angoli $HLC$, $HMA$, e però simili, ed eguali i triangoli $HLC$, $HMA$; dunque $CA = 2x + \frac{rrx - x^3}{rr}$, e perchè $CA = CB$, sarà l'equazione $\frac{3rrx - x^3}{rr} = \sqrt{2rr + r\sqrt{4rr - xx}}$, e quadrando, $9r^4xx - 6rrx^4 + x^6 = 2r^6 + r^5\sqrt{4rr - xx}$; e di nuovo quadrando, ed ordinando l'equazione,

$$x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0.$$

Ed eccomi giunta ad un'altra equazione, la quale, perchè di grado inferiore alla prima, si dovrà moltiplicare per tanta potestà dell'incognita, quanta è necessaria, acciò divenga dello stesso grado, e con essa si possa paragonare; moltiplicandola adunque per $xx$, sarà

$$x^{12} - 12rrx^{10} + 54r^4x^8 - 112r^6x^6 + 105r^8x^4 - 35r^{10}xx =$$
$$x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12},$$

e sottratta la prima dalla seconda, sarà

$$x^{10} - 11rrx^8 + 45r^4x^6 - 84r^6x^4 + 70r^8xx - 21r^{10} = 0,$$

la quale, perchè è del decimo grado, paragonata colla seconda equazione di sopra ritrovata

$$x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0,$$

e da essa sottratta, sarà

$x^8 - 9rrx^6 + 28r^4x^4 - 35r^6xx + 14r^8 = 0$, che è divisibile per $xx - 2rr$, e fatta la divisione, avremo finalmente l'equazione del sesto grado

$x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$.

Ho tenuta questa strada, per far vedere l'uso del metodo; per altro sarei giunta più presto alla stessa equazione, se avessi paragonati fra loro i due valori del quadrato di $CA$ ritrovati nelle due diverse soluzioni del problema, cioè $\frac{16r^6xx - 20r^4x^4 + 8rrx^6 - x^8}{r^6}$ della prima, e $\frac{9r^4xx - 6rrx^4 + x^6}{r^4}$ della seconda; imperciocchè fatta l'equazione fra questi due valori, e tolti i termini, che si elidono; sarà $x^8 - 7rrx^6 + 14r^4x^4 - 5r^6xx = 0$, e dividendo per $xx$, $x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$, come sopra. Si poteva anche più brevemente dividere l'equazione da prima ritrovata $x^{12} - 13rrx^{10} + 65r^4x^8 - 157r^6x^6 + 189r^8x^4 - 105r^{10}xx + 21r^{12} = 0$ per $x^6 - 6rrx^4 + 9r^4xx - 5r^6 = 0$, o la seconda $x^{10} - 12rrx^8 + 54r^4x^6 - 112r^6x^4 + 105r^8xx - 35r^{10} = 0$, per $x^4 - 5rrxx + 5r^4 = 0$, e nell'uno, e nell'altro caso avrebbesi ritrovato $x^6 - 7rrx^4 + 14r^4xx - 7r^6 = 0$.

Non

Non è però del ſeſto grado il propoſto problema, ſebbene tale appariſce, non oſtante la uſata induſtria; per vederlo, ritenuta la ſteſſa compoſizione di figura, ſi denomini $HI = x$, ſarà $AI = \sqrt{rr - xx} = IB$, $CI = r + x$, $CB = \sqrt{rr + 2rx + xx + rr - xx} = \sqrt{2rr + 2rx}$. Indi ripetendo lo ſteſſo diſcorſo di ſopra, ſi avrà $CK = \frac{2x\sqrt{rr - xx}}{r}$; $HK = \sqrt{\frac{r^4 - 4rrxx + 4x^4}{rr}} = \frac{rr - 2xx}{r}$; $CE = 2\,CK = \frac{4x\sqrt{rr - xx}}{r}$; $CN = \frac{4rrx - 8x^3}{r^3}\sqrt{rr - xx}$; $CB = 2\,CN = \frac{8rrx - 16x^3}{r^3}\sqrt{rr - xx}$. Ma ſi è anco trovato $CB = \sqrt{2rr + 2rx}$; dunque ſarà l'equazione

$$\sqrt{2rr + 2rx} = \frac{8rrx - 16x^3}{r^3}\sqrt{rr - xx}.$$

Cerco altra equazione in maniera diverſa, ma ritenendo la ſteſſa $HI = x$ per incognita; per lo ſteſſo diſcorſo di ſopra, ſarà $DL = \frac{4rr - 4xx}{r}$; $LH = r - \frac{4rr + 4xx}{r} = \frac{4xx - 3rr}{r}$; $LM = 2\sqrt{\frac{rr - xx}{rr}} \times \overline{4xx - 3rr}$; $CA = 4\sqrt{rr - xx} + 2\sqrt{\frac{rr - xx}{rr}} \times \overline{4xx - 3rr}$, cioè riducendo,

do, $CA = \frac{\overline{8xx - 2rr}\sqrt{\overline{rr - xx}}}{rr} = CB$; e però $\sqrt{\overline{2rr + 2rx}} = \frac{\overline{8xx - 2rr}\sqrt{\overline{rr - xx}}}{rr}$, e finalmente, egua-gliando gl' omogenei di comparazione dell' una, e dell' altra equazione, ſarà $\frac{\overline{8rrx - 16x^3}\sqrt{\overline{rr - xx}}}{r^3} = \frac{\overline{8xx - 2rr}\sqrt{\overline{rr - xx}}}{rr}$, la quale equazione ridotta viene ad eſſere $8x^3 + 4rxx - 4rrx - r^3 = 0$, del terzo grado.

180. Meſſi in opra i ſopraſcritti metodi, ſe le equazioni non poſſono abbaſſarſi, e rimangono di grado ſuperiore al ſecondo, in due maniere ſi può procedere per la ſoluzione de' problemi, che rieſcono ſolidi, o più che ſolidi. Una maniera, che è di pochiſſimo uſo, riguarda le ſole equazioni del terzo, e quarto grado, e conſiſte nel riſolverle, ſviluppando i valori analitici dell' incognita, che ci ſi preſenteranno però ſotto radici cube, e chiamaſi *la Regola di Cardano*. La ſeconda generaliſſima, e di moltiſſimo uſo conſiſte nel ritrovare i valori geometrici dell' incognita col mezzo delle interſezioni di certe curve opportunamente introdotte nell' equazione, e così coſtruire il problema propoſto.

181. E per cominciare dalla riſoluzione analitica, ſuppongo, che le equazioni manchino del ſecondo termine, tali potendoſi ſempre ridurre, ſe non lo ſono. Tutte

le

le equazioni del terzo grado mancanti del secondo termine sono comprese sotto queste quattro canoniche.

I. $x^3 - px - q = 0$. II. $x^3 + px - q = 0$.
III. $x^3 - px + q = 0$. IV. $x^3 + px + q = 0$.

Si faccia $x = y + z$, e però $px = py + pz$, ed $x^3 = y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3$, e sostituiti questi valori rispetto alla prima equazione, sarà essa $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 - py - pz - q = 0$; di questa se ne formino due, cioè $3yyz + 3zzy = py + pz$, ed $y^3 + z^3 = q$, dalla prima si ricava, dividendo per $y + z$, $3yz = p$, cioè $y = \frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda darà $\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = q$, o sia $z^6 - qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e per le regole delle quadratiche affette, $z^6 - qz^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}$, e $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$; e finalmente $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$. Nella estrazione della radice quadrata ô preso il solo segno positivo, perchè il negativo nulla varia, e dà in fine la stessa quantità del positivo per il valore della $x$, come si potrà vedere facendone il calcolo; il che s'intenda similmente riguardo all'altre tre equazioni canoniche. Ma $y^3 + z^3 = q$, sarà adunque $y^3 = q - \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$, e però $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$;

ma

ma in oltre si è fatta $x = y + z$, sarà adunque $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, giacchè l'alternativa de' segni ommessa nulla varia.

182. La seconda equazione $x^3 + px - q = 0$, fatte le stesse sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 + py + pz - q = 0$. Si formino le due equazioni $3yyz + 3zzy = -py - pz$, ed $y^3 + z^3 = q$; dalla prima si ricava $3yz = -p$, cioè $y = -\frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = q$, o sia $z^6 - qz^3 = \frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{qq}{4} + \frac{p^3}{27}}$, e $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, ma $y^3 + z^3 = q$, adunque $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, ed $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$.

183. La terza equazione $x^3 - px + q = 0$, fatte le sostituzioni, sarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 - py - pz + q = 0$. Si formino le due equazioni $3yyz + 3zzy = py + pz$, ed $y^3 + z^3 = -q$; dalla prima si ricaverà $3yz = p$, cioè $y = \frac{p}{3z}$, che sostituito nella seconda dà $\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = -q$,

o sia

o ſia $z^6 + qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, e $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$; ma $y^3 + z^3 = -q$, adunque $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e finalmente $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$.

184. La quarta equazione $x^3 + px + q = 0$, fatte le ſoſtituzioni, ſarà $y^3 + 3yyz + 3zzy + z^3 + py + pz + q = 0$. Formo le due equazioni $3yyz + 3zzy = -py - pz$, ed $y^3 + z^3 = -q$; dalla prima ſi avrà $3yz = -p$, cioè $y = -\frac{p}{3z}$, che ſoſtituito nella ſeconda dà $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 = -q$, o ſia $z^6 + qz^3 = \frac{p^3}{27}$, e però $z^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}$, e $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, ma $y^3 + z^3 = -q$, adunque $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, e finalmente $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$.

185. Le ſteſſe radici, o formole ſi avranno ponendo

do $x = z \pm \frac{p}{3z}$, cioè $+\frac{p}{3z}$, se nell'equazione è $-px$, e $-\frac{p}{3z}$, se nell'equazione è $+px$; quindi $x^3 = z^3 \pm pz + \frac{pp}{3z} \pm \frac{p^3}{27z^3}$. Fatte adunque le sostituzioni nella prima equazione canonica $x^3 - px - q = 0$, sarà essa $z^3 + \frac{p^3}{27z^3} - q = 0$, cioè $z^6 - qz^3 = -\frac{p^3}{27}$, e $z^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}$, e finalmente $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$; adunque, poichè si è posto $x = z + \frac{p}{3z}$, sarà

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}.$$

Per ridurre questa alla stessa espressione ritrovata nella prima maniera, basta moltiplicare il numeratore, e denominatore del secondo termine dell' omogeneo di comparazione per $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e sarà esso $\frac{p\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{\frac{p^3}{27}}}$, cioè $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, e

però

però $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$,

come prima.

La radice per la seconda equazione $x^3 + px - q = 0$ sarebbe $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}}$,

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell'omogeneo di comparazione per

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, sarà

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}},$$

come prima.

La radice per la terza equazione $x^3 - px + q = 0$ sarebbe $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}}$,

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell' omogeneo di comparazione per

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}}$, sarà

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

come prima.

La radice per la quarta equazione $x^3 + px + q = 0$ sarebbe $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}}$,

e moltiplicando il numeratore, e denominatore del secondo termine dell' omogeneo di comparazione per $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$, sarà

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}},$$

come prima.

186. E' chiaro a vedersi, che i valori ritrovati dell' incognita $x$ colla prima sostituzione $x = y + z$ esiggono l'estrazione di due diverse radici cube, la dove i secondi avuti con la sostituzione $x = z \pm \frac{p}{3z}$ richieggono l'estrazione d'una sola; e che il valore per la seconda, e quarta equazione canonica ci comparirà sempre sotto forma reale, perchè la quantità sotto il vincolo radicale quadratico è tutta positiva; ma quello della prima, e terza sarà sotto forma reale, se sia $\frac{1}{4}qq$ maggiore di $\frac{p^3}{27}$, e sotto forma immaginaria, quando sia $\frac{1}{4}qq$ minore di $\frac{p^3}{27}$, (e questo chiamasi il caso irreducibile) ma ciò nulla ostante non è

però,

però, ch'egli non sia reale; anzi tutti e tre i valori della prima, e terza equazione, quando sia $\frac{1}{4}qq$ minore di $\frac{p^3}{27}$, sono reali; siccome essendo $\frac{1}{4}qq$ maggiore di $\frac{p^3}{27}$ nella prima, e terza equazione, e generalmente nella seconda, e quarta, le sole radici o valori così ritrovati sono reali, gli altri due sono immaginarj.

E quanto alla seconda, e quarta equazione, ciò è già stato dimostrato al num. 152. avendo esse il terzo termine positivo. Rispetto poi alla prima, e terza, cioè quando il terzo termine è negativo, abbia ciascuna di esse le tre radici reali, che sieno $a$, $-b$, $-c$, o pure $-a$, $+b$, $+c$, e poichè manca il secondo termine, come si suppone, sarà $a = b + c$, e l'equazione per tanto, che nasce da tali radici, sarà di questa forma

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - bbx \pm bc \times \overline{b+c} \\ \quad\;\; - bcx \\ \quad\;\; - ccx \end{array}\right\} = 0.$$

Essendo $b$, $c$ quantità reali, sarà $\overline{b-c}^2$ quantità positiva, e perciò, se si ponga $bb - 2bc + cc = D$, sarà anco $bb + bc + cc = D + 3bc$, e $\frac{\overline{bb + bc + cc}^3}{27} = \frac{D^3}{27} + \frac{DDbc}{3} + Dbbcc + b^3c^3$; ma sarà in oltre $bb + 2bc + cc$, cioè $\overline{b+c}^2 = D + 4bc$, e però $\frac{bbcc \times \overline{b+c}^2}{4} = \frac{Dbbcc}{4} + b^3c^3$; e $\frac{D^3}{27} + \frac{DDbc}{3} + Dbbcc + b^3c^3$

è maggiore di $\frac{Dbbcc + b^3c^3}{4}$; adunque ſarà anche maggiore di $bbcc \times \frac{\overline{b+c}^2}{4}$, e però $\frac{\overline{bb+bc+cc}^3}{27}$ maggiore di $bbcc \times \frac{\overline{b+c}^2}{4}$, cioè il cubo preſo poſitivo della terza parte del coefficiente del terzo termine maggiore del quadrato della metà dell' ultimo; cioè $\frac{p^3}{27}$ maggiore di $\frac{1}{4}qq$. Adunque ſe eſſendo le radici tutte reali, il terzo termine è ſempre negativo, ed in oltre $\frac{p^3}{27}$ è maggiore di $\frac{qq}{4}$; quando altrimenti ſi trovi vi ſaranno due radici immaginarie, il che ec.

Ritrovato nella ſuddetta maniera un valore per ciaſcuna equazione, ſi avranno gli altri due col dividere per queſto valore l'equazione propoſta, poichè il quoziente ſarà un' equazione del ſecondo grado, che ſi potrà ſempre riſolvere.

187. Potrebbeſi però anche, ſe più torna comodo, riſparmiare il tedio della diviſione riflettendo, che ſiccome tre ſono le radici cube dell' unità, cioè $1$, $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, così intendendoſi qualunque

quantità, per esempio $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}$, moltiplicata nell'unità, le tre di lei radici cube saranno

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\overline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}}\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$$

$\overline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}}\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}}$; quindi le tre radici cube della prima equazione $x^3 - px - q = 0$ saranno, ordinandole però debitamente, le seguenti

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{p^3}{27}}} - \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

$$x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}},$$

ed in fatti facendo il prodotto delle radici tra loro, e ponendo per brevità $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} = m$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{p^3}{27}}} = n$, il prodotto dell'ultima $x + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times m + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times n$ nella seconda $x + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \times m + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times n$ sarà

rà $xx+mx+nx+mm-mn+nn$, che moltiplicato nella prima $x-m-n$ darà $x^3-3mnx-m^3-n^3$, e restituendo i valori di $m$, e di $n$, sarà finalmente $x^3-px-q=0$, equazione proposta. Nè differentemente si proceda per l'altre equazioni.

188. Ritrovate le accennate formole generali, per applicarle all'uso particolare di equazioni date, basterà paragonare la proposta equazione con la corrispondente delle quattro canoniche, per avere indi il valore della $q$, e della $p$, i quali sostituiti nella formola ci daranno le ricercate radici.

Sia l'equazione $x^3+2aax-9a^3=0$; la corrispondente delle quattro canoniche sarà la seconda $x^3+px-q=0$, adunque sarà $p=2aa$, $q=9a^3$, onde facendo la sostituzione di questi valori in luogo di $p$, e di $q$ nella espressione generale della radice di essa seconda equazione, cioè in

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{p^3}{27}}},$$

sarà $x=\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{81a^6}{4}+\frac{8a^6}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{81a^6}{4}+\frac{8a^6}{27}}}$,

o sia $x=\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}}$,

e l'al-

e l'altre due faranno

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}}\;\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}},$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}+\sqrt{\frac{2219a^6}{108}}}\;\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{9a^3}{2}-\sqrt{\frac{2210a^6}{108}}},$$

il prodotto delle quali reſtituiſce la propoſta equazione.

189. Ma anche ſenza rapportare le particolari equazioni alle formole generali, ſi poſſono eſſe indipendentemente riſolvere, facendo uſo della data regola. Così per l'equazione $x^3 + 2aax - 9a^3 = 0$, fatta $x = y + z$, ſarà $2aax = 2aay + 2aaz$, ed $x^3 = y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3$, e ſoſtituiti queſti valori nella propoſta equazione, ſarà mutata in queſt'altra $y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 + 2aay + 2aaz - 9a^3 = 0$, di queſta ſe ne formino due, cioè $3zyy + 3zzy = -2aay - 2aaz$, ed $y^3 + z^3 = 9a^3$; dalla prima, dividendo per $y + z$, caveraſſi $3zy = -2aa$, cioè $y = -\frac{2aa}{3z}$, che ſoſtituito nella ſeconda dà $-\frac{8a^6}{27z^3} + z^3 = 9a^3$, o ſia $z^6 - 9a^3z^3 = \frac{8a^6}{27}$, e però $z^3 = \frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}$, e $z = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$; ma $y^3 + z^3 = 9a^3$, adunque $y^3 = \frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}$, e però $y = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$; ma $y + z = x$,

adun-

adunque $x = \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} + \frac{8a^6}{27}}}$, la ſteſſa come ſopra.

Sia l'equazione $z^3 + 3azz - 5aaz + 2a^3 = 0$. Si levi il ſecondo termine, facendo $z = x - a$, e viene $x^3 - 8aax + 9a^3 = 0$. Riferita queſta alla terza canonica, avremo $p = 8aa$, $q = 9a^3$, quindi ſoſtituiti queſti valori nella formola generale per la radice, ſarà

$$x = \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{81a^6}{4} - \frac{512a^6}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{81a^6}{4} - \frac{512a^6}{27}}},$$

cioè $x = \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}}}$,

e l'altre due

$$x = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}}}$$

$$x = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} + \sqrt{\frac{139a^6}{108}}} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{9a^3}{2} - \sqrt{\frac{139a^6}{108}}}$$

e perchè ſi è fatta $z = x - a$, ſottraendo la quantità $a$ da ciaſcuna delle tre ritrovate radici, ſi avranno le radici della propoſta equazione $z^3 + 3azz - 5aaz + 2a^3 = 0$.

Sia l'equazione $x^3 - 9aax + 2a^3 = 0$. La corriſpondente delle quattro canoniche ſarà la terza $x^3 - px + q = 0$; adunque ſarà $p = 9aa$, $q = 2a^3$, onde facendo la ſoſtituzione di queſti valori in luogo di $p$, e di $q$ nell'eſpreſ-

ſione

ſione generale della radice di eſſa terza equazione, ſarà $x = \sqrt[3]{-a^3 + \sqrt{-\frac{702a^6}{27}}} + \sqrt[3]{-a^3 - \sqrt{-\frac{702a^6}{27}}}$, eſpreſſione immaginaria, quantunque tutte tre le radici ſieno reali, come appunto porta il caſo irriducibile.

190. Nelle equazioni del quarto grado ſi procederà in queſta maniera. Sia l'equazione canonica $x^4 * + pxx + qx - r = 0$, in cui manca il ſecondo termine, e ſe non mancaſſe, da eſſa s'avrebbe a togliere; ſi traſformi queſta in una cubica nella maniera ſpiegata al num. 167. per mezzo delle due formole ſuſſidiarie $xx + yx + z = 0$, $xx - yx + u = 0$, e ſarà la traſformata

$$y^6 + 2py^4 + ppyy - qq = 0$$
$$\phantom{y^6 + 2py^4} + 4ryy$$

e le due ſuſſidiarie, poſti in luogo di $u$, e di $z$ i valori ritrovati dal paragone de' termini, ſaranno $xx + yx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy - \frac{q}{2y} = 0$,

$xx - yx + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}yy + \frac{q}{2y} = 0$, e perchè ſi ſuppone, che queſta non abbia diviſore alcuno di due dimenſioni, da eſſa ſi tolga il ſecondo termine colla ſoſtituzione $yy = t - \frac{2}{3}p$, ed averemo la nuova equazione

$$\begin{aligned} t^3 - \tfrac{1}{3}ppt &- \tfrac{2p^3}{27} \\ + 4rt &- \tfrac{8}{3}pr = 0. \\ &- qq \end{aligned}$$

Si paragoni questa alla prima, o seconda delle quattro canoniche del num. 181., secondo che $4r$ è minore, o maggiore di $\frac{1}{3}pp$, per averne la radice cuba, che per brevità chiamisi $h$; onde sia $t=h$, e perchè si è fatto $yy=t-\frac{2}{3}p$, sarà $yy=h-\frac{2}{3}p$, e però $y=\sqrt{h-\frac{2}{3}p}$, che si ponga per brevità $=g$. Nelle due formole sussidiarie si ponga $g$ in luogo di $y$, e $gg$ in luogo di $yy$, e saranno

$$xx+gx+\frac{gg}{2}+\frac{p}{2}-\frac{q}{2g}=0, \quad xx-gx+\frac{gg}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q}{2g}=0,$$

le radici delle quali sono $x=-\frac{g}{2}\pm\sqrt{\frac{q}{2g}-\frac{p}{2}-\frac{gg}{4}}$, della prima, ed $x=\frac{g}{2}\pm\sqrt{-\frac{q}{2g}-\frac{p}{2}-\frac{gg}{4}}$, della seconda;

e ponendo il valore di $g=\sqrt{h-\frac{2}{3}p}$, saranno finalmente

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{h-\frac{2}{3}p}\pm\sqrt{\frac{q}{2\sqrt{h-\frac{2}{3}p}}-\frac{1}{3}p-\frac{1}{4}h},$$

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{h-\frac{2}{3}p}\pm\sqrt{\frac{-q}{2\sqrt{h-\frac{2}{3}p}}-\frac{1}{3}p-\frac{1}{4}h}$$

le quattro radici della proposta equazione

$$x^4 * +pxx+qx-r=0.$$

Sia l'equazione $x^4 * -86aaxx+600a^3x-851a^4=0$. Riferita questa all'antecedente canonica, sarà $p=-86aa$,

$q=$

$q = 600a^3$, $r = 851a^4$, e però la trasformata cubica sarà $y^6 - 172aay^4 + 10800a^4yy - 360000a^6 = 0$; ma poichè questa è divisibile per $yy - 100aa$, senza risolverla con le regole delle equazioni cubiche, già se ne â la radice, cioè $yy = 100aa$, ed $y = 10a$. Sostituiti questi valori in luogo di $y$, e di $yy$, come pure i valori di $p$, e di $q$ nelle due sussidiarie, saranno esse $xx + 10ax - 23aa = 0$, $xx - 10ax + 37aa = 0$, e le loro radici $x = -5a \pm \sqrt{48aa}$, $x = 5a \pm \sqrt{-12aa}$, che sono pure le quattro radici della proposta. Si â posto questo esempio per far vedere unicamente l'uso del metodo, mentre la data equazione si può ridurre a due di due dimensioni, colle maniere di sopra a suo luogo spiegate.

191. Nelle sole questioni aritmetiche può avere uso questo metodo di risolvere le equazioni, e non nelle geometriche, poichè avendosi in questo modo il valore dell'incognita espresso da radice cuba, (che si suppone non potersi attualmente cavare, poichè in questo caso l'equazione avrebbe un divisore, e non sarebbe del grado, che mostra) il ritrovare essa radice cuba geometricamente non può farsi altrimenti, che con l'intersecazione delle curve, che è la seconda maniera, e la generale da me di sopra indicata al num. 180.

Consiste questo metodo nell'introdurre una nuova incognita nell'equazione, per indi avere due equazioni,

 ciascu-

ciascuna delle quali contenga ambe le incognite, e tutte due assieme le cognite tutte dell'equazione proposta; queste due equazioni sono due luoghi geometrici da costruirsi, le intersezioni de' quali ci determinano i valori geometrici, o sia le radici dell'equazione proposta; e la ragione è chiara, poichè siccome dalla combinazione di due luoghi, o sia di due equazioni indeterminate, ponendo in una di queste in luogo di una delle due incognite il valore dato per l'altra equazione, nasce un'equazione determinata, così la determinata può risolversi in due indeterminate.

Sieno adunque le due equazioni $ax = zz$, $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$; se dalla prima, per esempio, si cavi il valore di $x$, che è $\frac{zz}{a}$, e si sostituisca nella seconda, nascerà l'equazione determinata del quarto grado $z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0$. Adunque se preso il luogo alla parabola $ax = zz$, farassi la sostituzione del valore di $zz$ nell'equazione $z^4$ ec., nascerà il secondo luogo $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$. Per costruire questo secondo luogo, al centro $A$, coll'asse trasverso $CB = \frac{8a}{5}$, e col parametro $= 8a$ si descrivano (*Fig.* 95.) le due opposte iperbole $BN$, $CP$, le quali, prese le assisse $z$ dal punto $D$ lontano dal centro $A$ la quantità $\frac{a}{5}$ verso il vertice $C$, saranno il luogo dell'equazione $xx - 5zz + 2az + 3aa = 0$.

Per

Per combinare rettamente questo col primo luogo $ax=zz$, è necessario, che l'origine, e l'asse dell'incognita $x$ sia comune ad ambi i luoghi; e però al vertice $D$, col parametro $=a$, sull'asse $DO$, parallelo all'asse conjugato delle opposte iperbole, si descriva la parabola della prima equazione $ax=zz$, incontrerà essa le due iperbole nei quattro punti $M$, $N$, $R$, $P$, dai quali condotte all'asse $DO$ le perpendicolari $MI$, $NO$, $RV$, $PS$, saranno esse i quattro valori di $z$, cioè le quattro radici dell'equazione $z^4 * -5aazz+2a^3z+3a^4=0$; positive le due $IM$, $ON$, e negative le altre $VR$, $SP$; imperciocchè, se la $z$ dell' equazione determinata (vale a dire ciascuna delle radici di essa) deve essere comune ad ambedue i luoghi, non può esserlo, se non ne' punti $M$, $N$, $R$, $P$, ne' quali si tagliano questi due luoghi; adunque le rette $MI$, $NO$, $RV$, $SP$, esprimenti le $z$, sono le quattro radici dell' equazione determinata proposta

$$z^4 * -5aazz+2a^3z+3a^4=0.$$

292. E' manifesto, che quanto più si accostano i punti $M$, $N$, tanto minore è la differenza delle ordinate $IM$, $ON$ per modo, che quando un punto cade nell'altro, (nel qual caso le curve si toccano, e non si tagliano) le due ordinate sono eguali, cioè due eguali radici avrà l'equazione; che se poi si tagliano le curve nel vertice, in cui è nulla l'ordinata, avrà l'equazione una radice eguale al zero; e se finalmente nè si tagliano, nè si toccano

cano in alcun punto le due curve, le radici della propofta equazione fono immaginarie.

193. Nell'introdurre la nuova incognita fa d'uopo però l'avvertire di farlo in modo, che i due luoghi fieno i più femplici relativamente al grado della propofta equazione; cioè a dire, che fe l'equazione è del terzo o quarto grado, i due luoghi fieno del fecondo, vale a dire fezioni coniche, e farà opportuno, a parere di alcuni, che uno fia fempre al circolo, come curva più femplice; ma fi rifletta, che determinando un luogo al circolo, l'equazione all'altro luogo può riufcire in moltiffimi cafi affai imbarazzata, e però in tali cafi preferirei al circolo quell' altro qualunque luogo, che mi daffe maggiore femplicità. Se l'equazione è del quinto o del fefto, i due luoghi fieno uno del fecondo e l'altro del terzo; fe è del fettimo, o ottavo, fiano uno del fecondo, ed uno del quarto, o due del terzo, riducendo però prima quelle dell' ottavo al nono, e così di mano in mano proporzionalmente.

Prefa adunque l'equazione del quarto grado

$$x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0 .$$

Si faccia la equazione

I. $xx + bx = ay$, e quadrando farà $x^4 + 2bx^3 + bbxx = aayy$, e però $x^4 + 2bx^3 = aayy - bbxx$. Nella propofta fi foftituifca quefto valore in luogo di $x^4 + 2bx^3$, e nafcerà queft'altra equazione

II. $yy - \frac{bbxx}{aa} + \frac{cxx}{a} - dx - af = 0$, e mettendo nel fecondo

condo termine di questa, lasciando intatto il terzo, il valore di $xx$ dato dalla prima equazione, cioè $ay - bx$, nascerà la

III. $yy - \frac{bby}{a} + \frac{b^3x}{aa} + \frac{cxx}{a} - dx - af = 0$, e sostituendo il valore di $xx$ nel terzo termine della stessa seconda equazione, lasciando intatto il secondo, nascerà la

IV. $yy - \frac{bbxx}{aa} + cy - \frac{bcx}{a} - dx - af = 0$, e posto in questa il valore di $xx$, nascerà la

V. $yy + cy - \frac{bby}{a} - \frac{bcx}{a} + \frac{b^3x}{aa} - dx - af = 0$, da cui finalmente se si sottragga la prima ridotta al zero, cioè $xx + bx - ay = 0$, ed indi ad essa si aggiunga, nascerà nel primo caso la

VI. $yy + cy - \frac{bby}{a} + ay - xx - bx - \frac{bcx}{a} + \frac{b^3x}{aa} - dx - af = 0$, e nel secondo la

VII. $yy + cy - \frac{bby}{a} - ay + xx + bx - \frac{bcx}{a} + \frac{b^3x}{aa} - dx - af = 0$.

194. Egli è chiaro, che la prima equazione è un luogo alla Parabola apolloniana; per riconoscere l'altre fa d'uopo servirsi delle riduzioni spiegate ai numeri 127., e 128. Con le quali troverassi, che la seconda sarà luogo alla Parabola quando sia $ac = bb$; all'Ellissi quando sia $ac$ maggiore di $bb$; ed all'Iperbola finalmente quando sia $ac$ mi-

minore di $bb$. Che la terza farà all'elliffi, che paffa ad effere un circolo quando fia $c=a$, e retto l'angolo delle coordinate. Che la quarta farà all'iperbola, la quale in oltre farà equilatera, fe fia $b=a$. Che la quinta farà alla parabola. Che la fefta farà all'iperbola equilatera. Che la fettima farà al circolo, quando fia retto l'angolo delle coordinate.

Quindi fi potrà fcegliere per la coftruzione del problema la combinazione di que' due luoghi, che più ci torneranno a propofito.

195. Se il fecondo termine della propofta equazione foffe ftato negativo, averebbefi fatto $xx-bx=ay$, e le equazioni nafcenti farebbero le fteffe di prima, mutando folo il fegno a que' termini, ne' quali la $b$ è di poteftà difpari; e fe la propofta equazione foffe ftata mancante del fecondo termine, averebbefi prefo $xx=ay$, e però, cancellando i termini dove fi trova la $b$ nell'altre equazioni, faranno effe qnelle, che a quefto cafo competono.

196. Effendovi nelle equazioni propofte il fecondo termine $\pm 2bx^3$, fi prende il luogo alla parabola $xx\pm bx=ay$ piuttofto, che $xx=ay$, perchè così gli altri luoghi, che nafcono, non ânno il rettangolo $xy$, e però fono più facili da coftruirfi.

ESEM-

## ESEMPIO I.

Sia l'equazione del terzo grado $x^3 - aax + 2a^3 = 0$. Si moltiplichi per $x = 0$, per ridurla del quarto, onde sia $x^4 - aaxx + 2a^3x = 0$; e debbasi costruire per mezzo d'una parabola, e d'un circolo.

Giacchè manca il secondo termine, si faccia $xx = ay$, luogo alla parabola; adunque sostituendo in luogo di $x^4$, e di $xx$ i valori $aayy$, ed $ay$, sarà $yy - ay + 2ax = 0$, a cui aggiunta la prima equazione $xx - ay = 0$, si avrà finalmente l'equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$, luogo al circolo.

Col diametro $BD = \sqrt{2aa}$ si descriva il circolo $ADME$, (*Fig. 96.*) e si faccia $BC = a$, sarà anche l'ordinata $CA = CB = a$. Dal punto $A$ condotta la indefinita $AP$ parallela ad $ED$, e prese sopra di essa le assisse $AP = y$, e chiamate le ordinate $PM = x$, sarà questo il luogo dell'equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$. Sull'asse $AP$, in cui si sono prese le $y$, col vertice $A$ si descriva la parabola appolloniana $MAM$ dell'equazione $xx = ay$, taglierà essa il circolo ne' due punti $A$, $M$, dai quali condotte le ordinate, saranno esse le radici reali dell' equazione $x^4 * - aaxx + 2a^3x = 0$, e due immaginarie.

Ma la ordinata nel punto $A$ è nulla, adunque una radice sarà $= 0$, come appunto deve essere, essendo

essa stata introdotta con moltiplicare la equazione proposta per $x = 0$, adunque sarà $PM$ la radice reale, e negativa dell'equazione $x^3 - aax + 2a^3 = 0$, e le altre due immaginarie. Se avessi moltiplicata la proposta equazione non per $x = 0$, ma per $x$ eguale ad una qualunque quantità, in due punti fuori del vertice il circolo taglierebbe la parabola, uno de' quali mi darebbe la radice introdotta, l'altro quella della equazione proposta.

Ora per dimostrare, che $PM$ è una radice dell' equazione $x^4 - aaxx + 2a^3x = 0$, si consideri, che per la natura del circolo è $EO \times OD = \overline{OM}^2$, ma $OM = -x - a$, $EO = y + \sqrt{2aa} - a$, ed $OD = a - y + \sqrt{2aa}$, dunque $xx + 2ax + aa = aa + 2ay - yy$; ma per l'equazione della parabola $AM$, è $xx = ay$, e però $\frac{x^4}{aa} = yy$, adunque sostituiti i valori di $y$, e di $yy$, e ridotta l'equazione al zero, sarà $x^4 - aaxx + 2a^3x = 0$, che è appunto quella del quarto grado, di cui si volevano le radici, il che ec.

197. Se si volesse costruire l'equazione $x^4 - aaxx + 2a^3x = 0$ per mezzo di due parabole, converrebbe servirsi dell'equazione ritrovata di sopra $yy - ay + 2ax = 0$, ed il luogo di questa colla parabola dell'equazione $xx = ay$ determinerebbero le radici, che si cercano.

Si descriva adunque (*Fig.* 97.) col parametro $= 2a$ la parabola $MCA$, in cui fatta $CD = \frac{1}{8}a$, ed abbassata

ta $DA = \frac{1}{2}a$, che incontrerà la parabola nel punto $A$, e condotta per lo punto $A$ l'indefinita $AP$ parallela all' asse $CD$, prese le assisse $x$ dal punto $A$ positive verso $B$, e negative verso $P$, e le ordinate $PM = y$, sarà essa il luogo dell'equazione $yy - ay + 2ax = 0$, quindi col vertice $A$, all'asse $AQ$ si descriva l'altra parabola $MAS$ dell'equazione $xx = ay$; taglierà questa la prima nei punti $A$, ed $M$, ed abbassata la perpendicolare $MP$, darà essa la radice $AP$ negativa dell' equazione proposta, e perchè nel punto $A$ la perpendicolare è nulla, è pure nulla l'altra radice, come deve esserlo, essendo stata moltiplicata l'equazione proposta per $x = 0$.

Imperciocchè essendo nella parabola $MCA$ la $CN = -x + \frac{a}{8}$, ed $NM = y - \frac{a}{2}$, sarà per la proprietà di essa parabola, $\frac{aa}{4} - 2ax = yy - ay + \frac{aa}{4}$, e sostituiti i valori di $y$, e di $yy$, dati per la prima equazione alla parabola $MAS$, cioè $xx = ay$, ed ordinata l'equazione, avremo finalmente $x^4 - aaxx + 2a^3x = 0$, che è l'equazione del quarto grado, di cui si volevano le radici.

198. Che se avessi voluto servirmi della parabola, e dell'iperbola equilatera, bastava sottrarre dalla detta equazione $yy - ay + 2ax = 0$ la prima equazione $xx - ay = 0$, e sarebbe nata l'equazione $yy + 2ax - xx = 0$, che è un luogo all'iperbola equilatera, la quale

costruita mi avrebbe date, per mezzo della intersecazione colla parabola dell' equazione $xx = ay$, le radici cercate.

199. E se finalmente avessi voluto sciogliere il problema per mezzo del circolo, e dell'iperbola, avrei costruita la terza equazione $yy - 2ay + 2ax + xx = 0$, luogo al circolo, e la quarta equazione $yy + 2ax - xx = 0$, luogo all'iperbola, come si è veduto; l'intersecazione dei quali luoghi mi avrebbe date le radici cercate.

200. Ma senza moltiplicare per $x$ l'equazione proposta $x^3 - aax + 2a^3 = 0$, si avrebbe potuto costruirla nella seguente maniera, quando però non prema d'introdurre piuttosto un luogo, che un' altro. Si faccia adunque $xx = ay$, ed in luogo di $xx$ si ponga nell' equazione il suo valore $ay$, nascerà l'equazione $xy - ax + 2aa = 0$, luogo all'iperbola fra gl'asintoti.

Si taglino adunque ad angoli retti le due indefinite $SR$, $QT$, (*Fig.* 98.) e sieno esse gli asintoti delle due iperbole $MM$, $mm$ del rettangolo costante $-2aa$, prendendo le assisse dal punto $A$ lontano dal punto $B$ la quantità $a$. Al vertice $A$, all'asse $AR$, col parametro $= a$ si descriva la parabola della prima equazione $xx = ay$, taglierà essa l'iperbola $MM$ nel punto $M$; ed abbassata l'ordinata $PM$, sarà essa la radice reale, e negativa dell' equazione proposta.

In

In fatti, per la proprietà dell' iperbola $MM$, sarà $BP \times PM = -2aa$, cioè $xy - ax = -2aa$, ma per la proprietà della parabola $AM$, si â $y = \frac{xx}{a}$, adunque sostituito in vece di $y$ il suo valore, ed ordinata l'equazione, sarà $x^3 - aax + 2a^3 = 0$, che è la proposta, il che ec.

Generalmente tutte le equazioni del terzo grado si possono sempre in questo modo costruire semplicemente, senza ridurle al quarto, con una Parabola, e con una Iperbola fra gl' Asintoti.

## ESEMPIO II.

Sia l'equazione del quarto grado $z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0$, la quale debbasi costruire per mezzo della parabola, e del circolo. Si prenda l'equazione $ax = zz$, e fattone il quadrato, si sostituisca nell' equazione proposta in luogo di $z^4$, e di $zz$ il suo valore, e nascerà la seconda equazione $xx - 5ax + 2az + 3aa$, dalla quale sottratta primieramente, ed indi aggiunta la prima equazione $zz - ax = 0$, si avrà nel primo caso la terza equazione $xx - 4ax + 2az + 3aa - zz = 0$, e nel secondo caso la quarta $xx - 6ax + 2az + 3aa + zz = 0$, che è un luogo al circolo, e però di essa mi servo per costruire la proposta equazione del quarto grado.

Si

Si descriva adunque col raggio $= \sqrt{7aa}$ il circolo $BMF$, e presa dal centro $C$ verso $B$ ( *Fig.* 99. ) la $CL = 3a$, indi dal punto $L$ eretta al diametro la perpendicolare $LA = a$, si tiri dal punto $A$ la retta indefinita $AP$ parallela al diametro $BF$, saranno le $AP = x$, e le corrispondenti ordinate nel circolo $PM = z$; e però sarà $A$ il vertice, ed $AP$ l'asse della parabola dell'equazione $ax = zz$, onde descritta al vertice $A$, coll' asse $AP$, col parametro $= a$ la parabola $AM$, incontrerà essa il circolo in quattro punti $M$, dai quali condotte all' asse $AP$ le perpendicolari $PM$, saranno esse le radici, due positive, e due negative dell' equazione proposta

$$z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0.$$

Ed in fatti, si prolunghi la $PM$ in $D$, se fa bisogno, e sarà per la natura del circolo $BMF$, $BD \times DF = \overline{DM}^2$, ma $DM = z + a$, $BD = x - 3a + \sqrt{7aa}$, e $DF = -x + 3a + \sqrt{7aa}$, adunque $zz + 2az + aa = -xx + 6ax - 2aa$; ma, per la natura della parabola $AM$, $ax = zz$, ed $xx = \frac{z^4}{aa}$, adunque fatta la sostituzione di questi valori, ed ordinata l'equazione col paragonarla al zero, sarà $z^4 - 5aazz + 2a^3z + 3a^4 = 0$, che è la proposta; il che ec.

ESEM-

## ESEMPIO III.

Sia l'equazione del terzo grado $x^3 - 3aax + 5a^3 = 0$, che si moltiplichi per $x + 2a$, a fine di ridurla del quarto, e sarà $x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^3x + 10a^4 = 0$.

Si prenda l'equazione alla parabola $xx + ax = ay$, e fatto il quadrato, sarà $x^4 + 2ax^3 + aaxx = aayy$, si sostituisca nell'equazione il valore dei due primi termini $x^4 + 2ax^3$, cioè $aayy - aaxx$, e nascerà la

II. $yy - 4xx - ax + 10aa = 0$, ed in questa sostituito in luogo di $xx$ il suo valore $ay - ax$, nascerà la

III. $yy - 4ay + 3ax + 10aa = 0$, da cui sottratta la prima $xx + ax - ay = 0$, ed indi aggiunta, nasceranno le due equazioni, cioè la

IV. $yy - 3ay + 2ax + 10aa - xx = 0$ nel primo caso, e la

V. $yy - 5ay + 4ax + 10aa + xx = 0$ nel secondo caso: prendo il primo, e l'ultimo luogo.

Per costruire l'ultimo, si descriva il circolo $OSN$ (*Fig.* 100.) del raggio $OP = \frac{1}{2}a$, e prodotto in $F$, onde sia $OF = 2a$, ed eretta dal punto $F$ la perpendicolare $FC = FO = 2a$, si tiri la indefinita $CQ$ parallela ad $FP$. Presa una qualunque $CQ = y$, saranno le corrispondenti ordinate negative $QS$, $QN$ le $x$, ed il circolo il luogo della quinta equazione. Si prenda ora in $FC$

la

la $CB = \frac{1}{2}a$, e dal punto $B$ si tiri la perpendicolare $BA = \frac{1}{4}a$, indi al vertice $A$, col parametro $= a$ si descriva la parabola $NAM$, che sarà il luogo della prima equazione, prese le assisse $y$ sulla retta $CQ$. Da' punti $O$, $N$, ne' quali la parabola taglia il circolo, alzate le perpendicolari $OH$, $NQ$, saranno esse le due radici reali negative dell' equazione del quarto grado $x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^3x + 10a^4 = 0$.

E perchè $OH$ presa negativa è eguale a $2a$, che è la radice introdotta colla moltiplicazione della proposta equazione in $x + 2a$, sarà $NQ$ la radice reale negativa dell' equazione proposta $x^3 - 3aax + 5a^3 = 0$, l'altre due radici immaginarie.

Imperocchè, per la natura del circolo $OSL$, sarà $OG \times GL = \overline{GN}^2$, ma $OG = y - 2a$, $GL = 3a - y$, e $GN = -2a - x$, dunque fatte le sostituzioni, sarà $xx + 4ax + 10aa + yy - 5ay = 0$; ma per l'equazione alla parabola $NAM$, $y = \frac{xx + ax}{a}$, ed $yy = \frac{x^4 + 2ax^3 + aaxx}{aa}$, dunque sostituiti nell' equazione al circolo questi valori di $y$, ed $yy$, sarà finalmente

$$x^4 + 2ax^3 - 3aaxx - a^3x + 10a^4 = 0; \text{ il che ec.}$$

ESEM-

## ESEMPIO IV.

Sia l'equazione $x^6 - 4aax^4 - 8a^3x^3 + 8a^4xx + 32a^6 = 0$, e perchè è divisibile per $xx - 4ax + 4aa$, ed il quoziente è l'equazione del quarto grado $x^4 + 4ax^3 + 8aaxx + 8a^3x + 8a^4 = 0$, si costruisca questa.

Presa adunque l'equazione $xx + 2ax = ay$, e fatto il quadrato $x^4 + 4ax^3 + 4aaxx = aayy$, si sostituisca nell'equazione in luogo di $x^4 + 4ax^3$ il valore $aayy - 4aaxx$, e viene la

II. $yy + 4xx + 8ax + 8aa = 0$, in questa si ponga il valore di $xx$, cioè $ay - 2ax$, e viene la

III. $yy + 4ay + 8aa = 0$, da cui sottraggasi la prima, e nasce la

IV. $yy + 5ay + 8aa - xx - 2ax = 0$, ed aggiunta finalmente la prima alla terza, sarà la

V. $yy + 3ay + 8aa + xx + 2ax = 0$.

Il secondo luogo è immaginario; il terzo è equazione determinata, ma le sue radici sono immaginarie; il quinto luogo è pure immaginario; il quarto luogo poi è reale, ed è un' iperbola equilatera.

All'asse $DC = \sqrt{11aa}$ si descrivano col centro $A$ l'iperbole $CR$, $DG$; (*Fig.* 101.) si prenda $AB = a$, e si erigga la perpendicolare indefinita $BM$, in cui si pren-

da $BM = \frac{5a}{2}$, e dal punto $M$ conducasi la $MQ$ parallela all'asse $DC$; prese dal punto $M$ sopra $MQ$ le $x$, saranno le corrispondenti $QR$, o sia $MT$ le $y$, e la curva il luogo dell'equazione quarta $yy + 5ay + 8aa - xx - 2ax = 0$. Prodotta $QM$ in $N$, e fatta $MN = a$, e condotta $NA$ al centro dell'iperbola, si prenda $NO = a$, ed al vertice $O$, col parametro $= a$, all'asse $OS$ si descriva la parabola $OM$, che passerà per lo punto $M$, indi prese sulla $MT$ le $y$, e le corrispondenti ordinate $TL = x$, sarà essa il luogo della prima equazione $xx + 2ax = ay$; ma poichè questi due luoghi non si possono mai incontrare, come è chiaro, saranno immaginarie tutte quattro le radici dell'equazione

$$x^4 + 4ax^3 + 8aaxx + 8a^3x + 8a^4 = 0,$$

quindi la proposta

$$x^6 - 4aax^4 - 8a^3x^3 + 8a^4xx + 32a^6 = 0$$

si trova avere due sole radici reali tra loro eguali, cioè ciascheduna $= 2a$.

201. Ma se in oltre si volessero costruire le equazioni del terzo, e quarto grado per mezzo non solo di luoghi conici, ma di luoghi conici già dati, o simili ai dati, il che può avere uso, quando una delle sezioni coniche sia data nel problema, si potrà farlo nel seguente modo, intendendo però, che le equazioni del terzo

terzo grado si riducano al quarto, e queste si liberino dal secondo termine, se lo avessero.

Devo però avvertire, che quantunque per lo più sia bene il determinarsi a quel dato luogo conico, che già entra nel problema; tuttavia si deve avere la mira, che l'uso di esso luogo dato non si opponga alla maggiore semplicità della costruzione, nel qual caso, non curato il luogo già dato, tornerà meglio introdurne due nuovi.

Volendosi adunque servire di luoghi dati, o simili a' dati, l'artifizio consiste nell'introdurre nelle equazioni due indeterminate, da fissarsi poi nel fine a misura del bisogno. Sia adunque l'equazione

$$z^4 + abzz - aacz + a^3 d = 0.$$

Si ponga $z = \frac{ax}{f}$, per introdurre la prima indeterminata $f$; fatte le sostituzionioni, sarà

$$x^4 + \frac{bffxx}{a} - \frac{f^3 cx}{a} + \frac{f^4 d}{a} = 0.$$

Si prenda il primo luogo

I. $xx - fy = 0$, e posti i valori di $xx$, e di $x^4$, nascerà il secondo luogo

II. $yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} = 0$, a questo si aggiunga il primo, ed avremo il

III. $xx - fy + yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} = 0$. Per introdurre

la feconda indeterminata $g$, fi moltiplichi il primo luogo per $\frac{g}{a}$, ed avremo $\frac{gxx - gfy}{a} = 0$, che aggiunto al fecondo ci dà il

IV. $yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} + \frac{gxx}{a} - \frac{gfy}{a} = 0$, e fottratto ci dà il

V. $yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} + \frac{gfy}{a} - \frac{gxx}{a} = 0$.

Il primo, e fecondo luogo fono alla Parabola, il terzo al Circolo, quando le coordinate facciano angolo retto, il quarto all'Ellifli, ed il quinto all'Iperbola.

Debbafi ora, per efempio, coftruire l'equazione per mezzo d'un circolo dato, e d'un' iperbola data. Si prenda adunque il terzo, e quinto luogo; e quanto al terzo luogo, col raggio $CG = \frac{f}{2a}\sqrt{cc - 4ad + bb - 2ab + aa}$ fi defcriva il circolo $EMG$, (*Fig.* 102.) e prefa $CD = \frac{fc}{2a}$, fi abbaffi dal punto $D$ la perpendicolare $DA = \frac{af - bf}{2a}$, (fuppofta $a$ maggiore di $b$, e fi alzi dalla parte oppofta, quando fia $b$ maggiore di $a$) indi dal punto $A$ fulla retta $AP$ parallela a $DG$ prefe le affiffe $AP = x$, faranno le corrifpondenti $PM$ le $y$, ed il circolo $EMG$ il luogo dell'equazione

$$xx - fy + yy + \frac{bfy}{a} - \frac{fcx}{a} + \frac{ffd}{a} = 0.$$

Rifpet-

Rispetto al quinto luogo; per costruirlo, e combinarlo col circolo, prodotta per lo punto $A$, origine delle $x$, la retta $DA$ in $H$ in modo, che sia $AH = \frac{gf + bf}{2a}$, e condotte per i punti $A$, $H$ le parallele $AP$, $HK$ alla $DG$; si prenda sulla $HK$ verso il punto $L$ la porzione $HI = \frac{fc}{2g}$, e col centro $I$, coll' asse trasverso $LK = \frac{f}{ga} \sqrt{aacc + 4aagd - abbg - ag^3 - 2abgg}$ (supposto però $cc + 4gd$ maggiore di $\frac{bbg + g^3 + 2bgg}{a}$) si descriva l'iperbola $KM$ del parametro $KO = \frac{f}{aa} \sqrt{aacc + 4aagd - abbg - ag^3 - 2abgg}$, in cui essendo $AP = x$, $PM = y$, sarà essa il luogo della quinta equazione. Dai punti $M$, nei quali essa taglia il circolo, condotte le perpendicolari $MP$, $MP$ alla $AP$; saranno le $AP$, $AP$ le radici dell'equazione

$$x^4 + \frac{bff}{a} xx - \frac{cf^3}{a} x + \frac{df^4}{a} = 0 .$$

E poichè si è fatta $z = \frac{ax}{f}$, data la $x$, è pure data la $z$, vale a dire le radici dell'equazione da prima proposta $z^4$ ec.

Ma se avessi supposto $cc + 4dg$ minore di $\frac{bbg + 2bgg + g^3}{a}$,

il

il luogo della quinta equazione ſarebbe l'iperbola $MM$, ( *Fig.* 103. ) il di cui ſemiaſſe traſverſo

$= \frac{f}{2a} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^3 - acc - 4agd}{g}}$, il ſemiaſſe conjugato $IK = \frac{f}{2g} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^3 - acc - 4agd}{a}}$, ed il parametro $KO$ dell'aſſe conjugato

$= \frac{f}{a} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^3 - acc - 4agd}{a}}$.

Ciò poſto, per ſoddisfare alla prima condizione, che il circolo ſia dato; ſi ponga, che ſia il raggio di eſſo $= r$, adunque dovrà eſſere

$r = \frac{f}{2a} \sqrt{cc - 4ad + bb - 2ab + aa}$, dalla quale equazione ſi cavi il valore della indeterminata aſſunta

$f = \frac{2ar}{\sqrt{cc - 4ad + bb - 2ab + aa}}$; ed il deſcritto circolo $EGM$ ſarà quello del raggio $= r$.

Per ſoddisfare alla ſeconda condizione, che l'iperbola ſia data: ſia $2t$ il dato aſſe traſverſo, e $p$ il parametro, ſarà adunque $2t = \frac{f}{g} \sqrt{cc + 4gd - \frac{bbg - g^3 - 2bgg}{a}}$, e però $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc + 4dg - \frac{bbg - g^3 - 2bgg}{a}}}$; ma è pu-

re

re $p = \frac{f}{a} \sqrt{cc + 4dg - \frac{bbg - g^3 - 2bgg}{a}}$, adunque posto in luogo di $f$ il valore ritrovato, sarà $p = \frac{2gt}{a}$, da cui si ricava il valore di $g = \frac{ap}{2t}$, e posto questo in luogo di $g$ nel valore di $f$, sarà

$$f = \frac{2apt}{\sqrt{4ttcc + 8aptd - 2bbpt - \frac{aap^3}{2t} - 2abpp}};$$

quindi il diametro trasverso, ed il parametro della descritta iperbola (*Fig.* 102.) saranno appunto le date linee $2t$, e $p$, e ciò riguardo al primo caso.

Rispetto poi al secondo, cioè quando $cc + 4dg$ è minore di $\frac{bbg + g^3 + 2bgg}{a}$, si chiami l'asse conjugato della iperbola data $LK = 2u$, ed il suo parametro $= q$, sarà $2u = \frac{f}{g} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^3}{a} - cc - 4dg}$,

e $q = \frac{f}{a} \sqrt{\frac{bbg + 2bgg + g^3}{a} - cc - 4dg}$; quindi si ritroverà, operando come sopra, $g = \frac{aq}{2u}$,

ed $$f = \frac{2aqu}{\sqrt{2bbuq + 2baqq + \frac{aaq^3}{2u} - 4ccuu - 8aduq}};$$

e

e l'iperbola avrà per asse conjugato $LK=2u$, e per parametro dello stesso asse, $KO=q$. Ed il problema sarà costruito così per mezzo d'un circolo dato, e d'una data iperbola.

Che se non sarà data l'iperbola, ma dovrà essere simile ad una data, vale a dire, che l'asse sia al suo parametro in data ragione, per esempio di $m$ ad $n$, poichè si è veduto di sopra, che la ragione dell'asse al parametro è quella di $a$ alla $g$; basterà fare l'analogia $a,g::m,n$ per indi avere il valore di $g=\frac{an}{m}$.

Usando dello stesso metodo si potrà costruire l'equazione col mezzo di altri dati luoghi, o simili ai dati; come, per esempio, col mezzo del suddetto dato circolo, e di una data ellissi, o simile ad una data, prendendo in vece della quinta, la quarta equazione ec.

## ESEMPIO V.

Sia l'equazione $x^4 - ax^3 - aaxx - a^3x - 2a^4 = 0$, e si voglia costruire per mezzo d'una parabola del parametro $=a$, e con una ellissi simile ad una data, il di cui asse trasverso sia al parametro nella data ragione di $b$ a $d$.

Tolgasi da essa il secondo termine colla sostituzione

di

di $x = z + \frac{a}{4}$, e farà la trasformata

$$z^4 - \frac{11aazz}{8} - \frac{13a^3z}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0.$$

Pongo $z = \frac{ay}{f}$, per introdurre la prima indeterminata $f$, e farà $y^4 - \frac{11ffyy}{8} - \frac{13f^3y}{8} - \frac{595f^4}{256} = 0$. Preso per primo il luogo $yy = fq$ alla parabola, e fatta la sostituzione de' valori di $y^4$, e di $yy$, avremo il secondo luogo pure alla parabola $qq - \frac{11fq}{8} - \frac{13fy}{8} - \frac{595ff}{256} = 0$; ma poichè la parabola data è del parametro $= a$, potremo servirci del primo luogo prendendo $f = a$, e però sarà esso $yy = aq$, e sostituendo il valore di $f$ nel secondo ( giacchè non essendo data la ellissi, la prima indeterminata $f$ riguardo alla medesima è arbitraria ), sarà esso $qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} = 0$.

Si moltiplichi ora il primo luogo per $\frac{g}{a}$ a fine d'introdurre la seconda indeterminata $g$, e sarà $\frac{gyy - agq}{a} = 0$, il quale aggiunto al secondo darà il terzo luogo $qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} + \frac{gyy - agq}{a} = 0$, all'ellissi.

Per costruire questo terzo luogo, s'avrebbe a descrivere

vere l'ellissi $MSQ$ ( *Fig.* 104.) coll'asse trasverso $SQ = 2\sqrt{\frac{716aag + 176agg + 64g^3 + 169a^3}{256g}}$, e col parametro $= \frac{2a}{g}\sqrt{\frac{716aag + 176agg + 64g^3 + 169a^3}{256g}}$; ma poichè in essa la ragione dell'asse al parametro è quella di $g$ ad $a$, e deve essere, per la condizione data, quella di $b$ a $d$, sarà $g = \frac{ab}{d}$; e però sostituito in luogo di $g$ il suo valore, si descriverà l'ellissi $MSQ$ coll' asse trasverso $= \frac{1}{8d}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aabbd + 64aab^3 + 169aad^3}{b}}$, e col parametro $= \frac{1}{8b}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aabbd + 64aab^3 + 169aad^3}{b}}$.

Ora dal centro $C$ presa $CA = \frac{11ad + 8ab}{16d}$, ed abbassata dal punto $A$ la perpendicolare $AB = \frac{13d}{16b}$, se dal punto $B$ si tirerà la $BR$ parallela all' asse $SQ$, presa una qualunque $BR = q$, sarà $RM = y$, e l'ellissi il luogo della terza equazione

$$qq - \frac{11aq}{8} - \frac{13ay}{8} - \frac{595aa}{256} + \frac{gyy - agq}{a} = 0.$$

Al vertice $B$, asse $BR$, col parametro $= a$ si descriva la parabola $MBM$ dell'equazione $yy = aq$, taglierà essa l'ellissi ne' due punti $M$, $M$; dai quali condotte

le

le perpendicolari $RM$, $RM$ alla retta $BR$, ſaranno eſſe le due radici reali della propoſta equazione.

Imperciocchè, per la proprietà dell' elliſſi, ſarà $SP \times PQ$ a $\overline{PM}^2$, come l'aſſe traſverſo al parametro, ma $CP = q - \frac{11ad - 8ab}{16d}$, e però

$$SP = \frac{1}{16d}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aadbb + 64aab^3 + 169aad^3}{b}} + q - \frac{11ad - 8ab}{16d}, \text{ e}$$

$$PQ = \frac{1}{16d}\sqrt{\frac{716aabdd + 176aadbb + 64aab^3 + 169aad^3}{b}} - q + \frac{11ad + 8ab}{16d},$$

ed in oltre $PM = y - \frac{13ad}{16b}$, adunque avremo l'analogia

$$\frac{716aabdd + 176aabbd + 64aab^3 + 169aad^3}{256bdd} - qq + \frac{11adq + 8abq}{8d} - \frac{121aadd - 176aabd - 64aabb}{256dd}, \; yy - \frac{13ady}{8b} + \frac{169aadd}{256bb} :: \frac{1}{d}, \frac{1}{b} :: b, d;$$

e però l'equazione

$$\frac{595aabdd}{256bd} - dqq + \frac{11adq + 8abq}{8} = byy - \frac{13ady}{8},$$

ma per l'equazione alla parabola, è $yy = aq$; ſoſtituiti adunque in luogo di $q$, e di $qq$ i loro valori $\frac{yy}{a}$, $\frac{y^4}{aa}$, ed ordinata l'equazione, e dividendo per $d$, e moltiplicando i termini per $aa$, ſarà $y^4 - \frac{11aayy}{8} - \frac{13a^3y}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0$.

Ma per la sostituzione fatta di $z = \frac{ay}{f}$ abbiamo $z = y$ (essendo $f = a$), dunque sarà $z^4 - \frac{11aazz}{8} - \frac{13a^3z}{8} - \frac{595a^4}{256} = 0$, che è l'equazione ridotta, alle radici della quale aggiunto $\frac{a}{4}$, saranno esse le radici della proposta

$$x^4 - ax^3 - aaxx - a^3x - 2a^4 = 0,$$ il che ec.

Era superfluo il fare tutta questa fatica sopra un' esempio, che di natura sua è piano, e non solido, essendo la proposta equazione divisibile per $x + a$, e per $x - 2a$; ma servirà per fare vedere l'uso del metodo.

202. Le equazioni del quinto, e sesto grado si costruiranno per mezzo di due luoghi, cioè uno del terzo grado, e l'altro conico.

## ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $x^5 + aax^3 - a^5 = 0$. Prendo la parabola apolloniana $xx = ay$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo luogo $xyy + axy - a^3 = 0$. Nulla fin'ora si è parlato della costruzione de' luoghi superiori alle sezioni coniche, essendomi riserbata a trattarne nel seguente Capo, perchè così necessariamente esigge l'ordine; per

ora

ora adunque si suppongano, e però descritta la curva de' tre rami *MCH*, *FE*, *PNO* (*Fig.* 105.) dell' equazione $xyy + xxy - a^3 = 0$, in cui le *AB* sono le $x$, e le *BC* le $y$; al vertice *A*, asse *AL*, parametro $= a$ si descriva la parabola apolloniana *RAC*, incontrerà essa il ramo *MCH* nel punto *C*, e però abbassata la perpendicolare *CB*, sarà $AB = x$ la radice positiva, e reale dell' equazione proposta, e l' altre quattro immaginarie. Volendosi costruire la medesima equazione per mezzo d'un' iperbola fra gl' asintoti, e parimenti per un luogo del terzo grado, si faccia $xy = aa$, sostituendo sarà $x^3 + aax - ayy = 0$.

All' asse *AB*, con le assisse $AB = x$, e le ordinate $BC = y$ (*Fig.* 106.) si descriva la curva *CAN*, che è il luogo dell' equazione $x^3 + aax - ayy = 0$; e fra gl' asintoti *AB*, *AG* si descriva l' iperbola *MCH* dell' equazione $xy = aa$, prese le $x$ sul medesimo asse *AB*; taglierà essa la prima curva nel punto *C*, da cui abbassata la perpendicolare *CB*, sarà $AB = x$ la radice dell' equazione proposta, il che ec.

Moltiplico ora la medesima equazione per $x = 0$, a fine di ridurla del sesto grado, ed ô $x^6 + aax^4 - a^5 x = 0$. Prendo il medesimo luogo alla parabola $xx = ay$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $y^3 + ayy - aax = 0$, che è la curva *NBAM* (*Fig.* 107.), prese le assisse $AP = y$, e le $PM = x$.

Col vertice $A$, all' asse $AP$, col parametro $=a$ descritta la parabola apolloniana $AM$ dell' equazione $xx=ay$, taglierà essa la detta curva nel vertice $A$, il quale ci dà una radice $x=0$, che è appunto la introdotta nell'equazione, la taglierà in oltre nel punto $M$, ed abbassata la perpendicolare $MP$, sarà essa l'altra radice dell'equazione $x^6$ ec.

Volendosi servire della parabola prima cubica $x^3=aay$, si faccia la sostituzione nell' equazione $x^6+aax^4-a^5x=0$, e nasce il secondo luogo $yy+xy-ax=0$ all' iperbola apolloniana.

Sulla indefinita $AP$ (*Fig.* 108.) si descriva il triangolo $ACP$ rettangolo in $C$, (supposto, che l'angolo delle coordinate dell' equazione $yy+xy-ax=0$ si voglia retto) e sia $AC, CP :: 2, 1$; al centro $A$, col semidiametro trasverso $AF=a\sqrt{5}$, col parametro $=\frac{2a}{\sqrt{5}}$ si descriva l'iperbola apolloniana $FM$, la quale, condotta dal punto $F$ l'indefinita $FQ$ parallela ad $AC$; e presa una qualunque $FQ=x$, e $QM$ parallela a $CP$ eguale ad $y$, sarà il luogo dell'equazione $yy+xy-ax=0$. All'asse $FL$ parallelo a $PC$ si descriva la parabola cubica $NFM$ dell'equazione $x^3=aay$; taglierà essa l'iperbola nel vertice $F$, che ci dà la radice $x=0$, e nel punto $M$, dal quale abbassata la perpendicolare $MQ$ sopra $FQ$, determinerà essa l'altra radice $FQ$ dell'equazione $x^6+aax^4-a^5x=0$.

Se

Se la nostra equazione avesse avuto il secondo termine, volendosi servire della parabola cubica ci sarebbe nato un secondo luogo del terzo grado, quindi o s'avrebbe dovuto fare sparire esso secondo termine, o servirsi d'altro luogo.

## ESEMPIO VII.

Sia l'equazione del sesto grado $x^6 + ax^5 + a^5x - a^6 = 0$. Prendo il luogo alla parabola apolloniana $xx = ay$. Fatte le sostituzioni, sarà il secondo luogo $y^3 + xyy + aax - a^3 = 0$, che è la curva $CBM$ (*Fig.* 109.), prese le assisse $AP = y$, e le ordinate $PM = x$.

Al vertice $A$, col parametro $= a$, all' asse $AP$ si descriva la parabola $MAM$ dell' equazione $xx = ay$, taglierà essa la detta curva ne' due punti $M$, $M$, dai quali condotte all' asse le perpendicolari $MP$, $MP$, saranno esse le due radici, una positiva, e l'altra negativa dell' equazione proposta $x^6 + ax^5 + a^5x - a^6 = 0$, e le altre quattro immaginarie.

203. Le equazioni del settimo grado si costruiranno per mezzo di due luoghi del terzo, o pure con uno del secondo, ed uno del quarto, ma poichè moltiplicandole per l'incognita si riducono all' ottavo, e quelle dell' ottavo similmente si costruiscono con un

luogo

luogo del fecondo, e l'altro del quarto, mi accontenterò di dare un'efempio di quelle dell'ottavo.

## ESEMPIO VIII.

Sia l'equazione dell'ottavo grado $x^8 + ax^7 + a^3x^5 - a^8 = 0$. Prefa l'equazione alla parabola apolloniana $xx = ay$, e fatte le foftituzioni, nafce il fecondo luogo $y^4 + xy^3 + axyy - a^4 = 0$, che è la curva *GBFCMN*, (*Fig.* 110.) prefe le affiffe $AP = y$, e le ordinate $PM = x$.

Al vertice $A$, parametro $= a$, affe $AP$ fi defcriva la parabola apolloniana *MAN* dell'equazione $xx = ay$, incontrerà effa la detta curva ne' punti $M$, $N$ dai quali condotte le perpendicolari $MP$, $NQ$ all'affe, faranno effe le due radici reali, l'una pofitiva, e l'altra negativa della propofta equazione, e le altre fei immaginarie.

204. Quì fi deve avvertire, che le equazioni del nono grado, ficcome quelle dell'ottavo ridotte al nono, col moltiplicarle per l'incognita, fi potranno fempre coftruire per mezzo di due luogi del terzo grado, facendo però fparire il fecondo termine, quando lo aveffero.

Così generalmente le equazioni del decimo grado fi potranno coftruire per mezzo di un luogo del terzo, e di uno del quarto, e fimilmente quelle dell'undecimo,

mo, e duodecimo, avvertendo però di ridurre quelle dell' undecimo al duodecimo col moltiplicarle per l'incognita, e di fare svanire dalle equazioni del duodecimo grado il secondo termine, quando lo abbiano; e proporzionalmente s'intenda delle equazioni di grado superiore.

205. Un' altra maniera di costruire le equazioni di qualunque grado può essere per mezzo d'un luogo dello stesso grado dell'equazione proposta, e d'una linea retta nel seguente modo.

Sia l'equazione del quinto grado

$$x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3cx - a^4f = 0.$$

Trasportato dall'altra parte l'ultimo termine $a^4f$, e posto uno dei divisori lineari dell' ultimo termine, per esempio, $f = z$, dividasi l'equazione per $a^4$, onde avremo $z = \dfrac{x^5 - bx^4 + acx^3 - aadxx + a^3cx}{a^4}$.

Sull'indefinita $BQ$, dal punto fisso $B$ prendendo le $x$, (*Fig.* 111.) si descriva la curva $BMDRNLFC$ di quest'ultima equazione $z = \dfrac{x^5}{a^4}$ ec., saranno le ordinate $PM$, $SR$ ec. eguali a $z$, e però condotta dal punto $B$ la retta $BA = f$, parallela alle ordinate $PM$, $SR$, e per lo punto $A$ la indefinita $KC$ d'ambe le parti, e parallela a $BQ$; dai punti, nei quali essa taglia la curva, abbassate le perpendicolari $MP$, $RS$, $CQ$, determineranno

ranno esse le assisse $BP$, $BS$, $BQ$, che sono le radici dell' equazione proposta; intendendo le positive da $B$ verso $Q$, e le negative dalla parte opposta.

Se la retta $AC$ toccherà la curva in un punto, la corrispondente assissa $x$ esprimerà due radici eguali; e se in nessun punto la incontrerà, saranno tutte le radici immaginarie.

Se l' ultimo termine avesse avuto il segno positivo, s'avrebbe fatto $z = -f$, e però s'avrebbe presa $BA = -f$, cioè al disotto del punto $B$ nel senso dei negativi.

206. Può servire questa maniera per verificare le costruzioni, che si fanno con la combinazione di due curve, confrontando il numero delle radici reali, immaginarie, positive, e negative ritrovate con quelle, e con questa.

## PROBLEMA I.

207. *Ritrovare tra due date quantità, quante medie geometricamente proporzionali si vogliano.*

Sieno le date quantità $a$, $b$. Chiamo $x$ la prima delle medie proporzionali, e formo la progressione geometrica $a$, $x$, $\frac{xx}{a}$, $\frac{x^3}{aa}$, $\frac{x^4}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^4}$ ec.

Si

Se ſi vogliano due medie proporzionali, il quarto termine della progreſſione dovrà eſſere $b$, e però avremo l'equazione $x^3 = aab$: per coſtruirla colla parabola, e col circolo, la riduco al quarto grado moltiplicandola per $x = 0$, ed è $x^4 - aabx = 0$; preſo il luogo alla parabola $xx = ay$, e fatte le ſoſtituzioni, naſce il ſecondo luogo $yy - bx = 0$, pure alla parabola, da cui ſottraendo il primo, naſce il terzo $yy - bx - xx + ay = 0$, all'iperbola, ed aggiunto il primo al ſecondo, ſarà finalmente $yy - bx + xx - ay = 0$, luogo al circolo, ſuppoſto retto l'angolo delle coordinate.

Col raggio $CG = \frac{\sqrt{aa + bb}}{2}$ ſi deſcriva il circolo $OMA$ (*Fig.* 112.), e preſa $CB = \frac{1}{2}a$, ſi abbaſſi la perpendicolare $BA = \frac{1}{2}b$, la quale incontrerà il circolo nel punto $A$, da cui condotta la $AQ$ parallela al diametro $OG$, e preſa una qualunque porzione $AQ = y$, ſarà $QM = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione $yy - bx + xx - ay = 0$. Al vertice $A$, aſſe $AQ$, parametro $= a$ ſi deſcriva la parabola $xx = ay$, incontrerà eſſa il circolo nel punto $M$, da cui abbaſſata la perpendicolare $MQ$, ſarà eſſa la radice dell'equazione propoſta; giacchè il vertice della parabola, eſſendo nella periferìa del circolo, mi darà l'altra radice $x = 0$ da me introdotta; le altre due ſono immaginarie.

Preſa la prima, e la ſeconda equazione ſi coſtrui-

rà il problema per mezzo di due parabole apolloniane; presa la prima, e la terza, si costruirà il problema per mezzo della parabola, e dell' iperbola riferita ai diametri.

208. Senza moltiplicare l'equazione $x^3 - aab = 0$ per $x = 0$, si poteva costruire con la parabola, e l'iperbola fra gl'asintoti, poichè preso il luogo $xx = ay$, e fatta la sostituzione, nasce $xy = ab$.

Fra gl'asintoti $NN$, $QQ$ (*Fig.* 113.) si descriva l'iperbola $MM$ del rettangolo costante $ab$, e sieno $AP$ le $y$, $PM$ le $x$; all'asse $AP$, col vertice $A$, parametro $= a$ si descriva la parabola $AM$, dal punto $M$, in cui taglia l'iperbola, abbassata l'ordinata $MP$, sarà essa la radice dell'equazione proposta.

Ritrovata la prima delle due medie proporzionali, si â anche la seconda eguale alla assissa $AP = y = \frac{xx}{a}$.

209. Per ritrovare tre medie proporzionali il problema è piano, perchè ritrovata geometricamente quella di mezzo, che sia per esempio $m$, la media fra $a$, ed $m$ sarà la prima delle tre, e la media fra $m$, e $b$ sarà la terza.

210. Debbansi ritrovare quattro medie proporzionali, adunque dovrà essere $b$ il sesto termine della progressione, e però si avrà l'equazione $x^5 = a^4 b$.

Pren -

Prendo il luogo alla parabola apolloniana $xx = ay$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo $xyy - aab = 0$, che è l'Iperboloide del terzo grado. E però fra gl'asintoti $QQ$, $RR$ descrivasi l'iperboloide $MN$, $mn$ dell'equazione $xyy = aab$, ( *Fig.* 114. ) prese le assisse $AP = y$, e le $PM = x$. Ora descritta al diametro $AQ$, vertice $A$ la parabola dell'equazione $xx = ay$, e dal punto $M$, in cui incontra l'iperboloide, abbassata l'ordinata $MP$, sarà essa la radice dell'equazione $x^5 - a^4 b = 0$, e la prima delle medie proporzionali, che si cercano, per mezzo della quale si trovano le altre.

211. Anche per mezzo dell'iperbola apolloniana fra gl'asintoti, e della seconda parabola cubica si può costruire il problema.

Si faccia adunque $aa = xy$, luogo all'iperbola suddetta, e sostituito in luogo di $a^4$ il valore $xxyy$, nasce il luogo $x^3 = byy$, seconda parabola cubica.

All'asse $AQ$ ( *Fig.* 115. ) si descriva la seconda parabola cubica $RAN$, in cui le $AQ$ sono le $x$, e le $QN$ le $y$; e fra gl'asintoti $ST$, $MQ$ descritta l'iperbola $NN$, ed abbassata dal punto $N$, in cui incontra la parabola, la ordinata $NQ$; sarà $AQ$ la radice dell'equazione proposta, cioè la prima delle quattro medie proporzionali.

212. Per ritrovare cinque medie proporzionali il pro-

problema non è se non cubico, imperciocchè ritrovata quella di mezzo geometricamente, che sia per esempio $m$, per avere le due medie fra $a$, ed $m$ il problema è cubico, come si è veduto.

Per poca attenzione, che si usi, è facile a vedere, che il problema di ritrovare sei medie proporzionali si costruirà, o con un luogo del secondo, ed uno del quarto grado, o con due del terzo; ma per averne sette, ritrovata quella di mezzo, il problema si riduce a cercarne tre, e così discorrendo si vada di numero maggiore.

## PROBLEMA II.

213. *Date le due corde* BA, DC *del circolo* ABCD, (Fig. 116.) *che partono dall' estremità del diametro* BD, *e data la terza corda* AC, *si dimanda il diametro* BD *del circolo*.

Si conduca la corda $BC$, e si chiami $AB=a$, $AC=b$, $DC=c$, il diametro $BD=x$, e si abbassi la perpendicolare $BM$ sulla corda $AC$. Poichè l'angolo $BCD$ nel semicircolo è retto, sarà $BC=\sqrt{xx-cc}$, e perchè gli angoli $BAC$, $BDC$ insistono al medesimo arco $BC$, e di più gl'angoli $M$, e $BCD$ sono retti, saranno simili i due triangoli $BCD$, $BAM$, quindi

di sarà $AM = \frac{ac}{x}$; ma per la decimaterza del secondo d'Euclide, è $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2CAM$, adunque sarà l'equazione $xx - cc = aa + bb - \frac{2abc}{x}$, cioè

$$x^3 - ccx - aax - bbx + 2abc = 0.$$

La moltiplico per $x$, a fine di ridurla del quarto grado, e così costruirla per mezzo della parabola, e del circolo; ed è $x^4 - ccxx - aaxx - bbxx + 2abcx = 0$.

Preso adunque il luogo alla parabola, che abbia per parametro la minore delle tre corde, che sia per esempio $c$, cioè presa $xx = cy$, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $yy - \frac{ccy - aay - bby}{c} + \frac{2abx}{c} = 0$; che è pure alla parabola, a cui aggiunta la prima equazione $xx - cy = 0$, avremo finalmente il luogo al circolo, prese le coordinate in angolo retto,

$$yy - \frac{2ccy - aay - bby}{c} + \frac{2abx}{c} + xx = 0.$$

Al raggio $AC = \frac{\sqrt{aabb + ccmm}}{c}$ (facendo per brevità $m = \frac{2cc + aa + bb}{2c}$) si descriva il circolo $AMBP$, e presa (*Fig.* 117.) $CD = m$, si erigga dal punto $D$ la perpendicolare $DE = \frac{ab}{c}$, che terminerà nella perife-

ria

rìa del circolo nel punto $E$, e condotta la $EQ$ indefinita parallela al diametro $AB$, presa sopra di essa una qualunque $EL = y$, sarà l'ordinata corrispondente $LM = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione. Al vertice $E$, asse $EQ$, parametro $= c$ si descriva la parabola dell'equazione $xx = cy$; taglierà essa il circolo col vertice nel punto $E$, che mi dà la radice $x = 0$ da me introdotta. Lo taglierà in oltre ne' tre punti $M$, $N$, $P$; da' quali abbassate alla retta $EQ$ le perpendicolari $ML$, $NR$, $PQ$, saranno esse le tre radici dell'equazione $x^3 - ccx - aax - bbx + 2abx = 0$, due positive, ed una negativa. La prima positiva $ML$ non serve per questo problema; imperciocchè, supposta $y = c$, sarà nella parabola $x = c$, e nel circolo

$$x = -\frac{ab}{c} + \sqrt{\frac{aabb}{cc} + bb + aa + cc},$$ ma questo valore di $x$ relativamente al circolo è maggiore di $c$, se le due corde $a$, $b$ non sono eguali tra loro, ed è eguale alla $c$, se le due corde $a$, $b$ sono eguali, quindi il punto nella parabola, che corrisponde all'assissa $= c$, o cade in $M$, o cade dentro del circolo; adunque $ML$, o è minore di $c$, o al più ad essa eguale, e però necessariamente minore di ciascuna delle corde $a$, $b$, ed in conseguenza non potrà essere diametro del circolo.

La seconda radice positiva $RN$ ci somministra il

ri-

ricercato diametro; la negativa $QP$ ci fornisce il diametro per un'altro caso, cioè quando le due corde, che terminano al diametro, sieno condotte dalla medesima parte, come nella *Fig.* 118. Imperciocchè, fatte le stesse cose di sopra, si conduca in oltre la corda $AD$; essendo retto l'angolo $DAB$, saranno i due $DAC$, $MAB$ eguali ad un retto, ma sono pure eguali ad un retto i due $MAB$, $MBA$, adunque $MBA = DAC = CBD$, perchè insistente sul medesimo arco $DC$; quindi simili i due triangoli $CBD$, $MBA$, e però $MA = \frac{ac}{x}$, ma per la duodecima del secondo d'Euclide $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2 + 2CAM$; adunque sarà l'equazione $xx - cc = bb + aa + \frac{2abc}{x}$, cioè $x^3 - ccx - bbx - aax - 2abc = 0$, la di cui costruzione è la stessa dell' antecedente, a riserva, che per essere ora negativo l'ultimo termine, si dovrà condurre $DE$ (*Fig.* 117.) in senso negativo, per lo che l'asse della parabola sarà al di sotto del diametro del circolo, e le due radici positive nel primo caso sono negative in questo, e la negativa diviene positiva.

E perchè manca nell'una, e nell'altra equazione il secondo termine, ne viene, che le due radici positive nel primo caso sono eguali alla negativa, e la positiva nel secondo è eguale alle due negative, onde

ſi ſcopre, che la prima delle tre radici, la quale non dà ſoluzione alcuna del problema, ad eſſo però in certo modo appartiene in quanto, che è la differenza de' due diametri.

## PROBLEMA III.

214. *Dato il rettangolo* ACDB, *ritrovare nel lato prodotto* AC (Fig. 119.) *il punto* E *tale, che condotta dall'angolo* B *la retta* BE, *ſia l'intercetta* EF *eguale ad una data retta linea* c.

Quando in luogo del rettangolo $ABDC$, ſia dato un quadrato, il problema è piano, ed è ſtato ſciolto nel Capo IV. num. 176., ma ſuppoſto $ABDC$ rettangolo, muta natura, ed è ſolido. Chiamata pertanto $AB=a$, $BD=b$, $DF=x$, e ripetuto lo ſteſſo diſcorſo del citato luogo, ſi â l'equazione del quarto grado

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2abbx + aabb \\ \qquad\qquad\quad + bbxx \\ \qquad\qquad\quad - ccxx \end{array} = 0.$$

Per coſtruirla con un'iperbola fra gl'aſintoti, e con il circolo, pongo $ab=zx$, e fatte le ſoſtituzioni, naſce il ſecondo luogo al circolo

$$\begin{array}{l} xx - 2ax + aa - 2bz + zz \\ \qquad\qquad + bb \\ \qquad\qquad - cc \end{array} = 0.$$

Fra

Fra gl'asintoti $BA$, $BD$ si descriva l'iperbola $OM$ dell'equazione $zx = ab$, che passerà per lo punto $C$; presa una qualunque assissa $BP$, $BN$ ec. $= z$, sarà l'ordinata $PO$, $NM$ ec. $= x$. Al centro $C$, col raggio eguale alla data retta $c$ si descriva il circolo $OMV$, che sarà il luogo dell'equazione

$$\begin{array}{l} xx - 2ax + aa - 2bz + zz \\ \qquad\qquad\quad + bb \qquad\qquad = 0. \\ \qquad\qquad\quad - cc \end{array}$$

Da' punti $O$, $M$, nei quali questo taglia l'iperbola, abbassate le perpendicolari $OP$, $MN$, esse saranno le due radici positive dell'equazione; la minore servirà per il problema nel caso proposto dell'angolo $BAC$, la maggiore per l'angolo $ACf$. E se la data retta $c$ è tale, che il circolo non arrivi a tagliare la opposta iperbola $mo$, l'altre due radici sono immaginarie; che se la taglia, saranno negative reali, e serviranno per l'angolo $ACD$.

## PROBLEMA IV.

215. *Dividere in tre parti eguali un dato angolo* $FCB$, (Fig. 120.) *o sia arco* $FAB$.

Siano $H$, $I$ i punti, che si cercano, della divisione, adunque dovranno essere eguali le corde $FH$, $HI$, $IB$, ed essendo dato l'arco $FAB$, sarà data la

corda $FB$, che si chiami $=2f$, e condotto il raggio $CA=r$ perpendicolare ad $FB$, che la taglierà per metà in $D$, taglierà pure per metà anco la corda $HI$, e sarà nota $CD$, che pongo $=a$; condotto il raggio $CK$ perpendicolare a $CA$, e dal punto $H$ abbassata la $HL$ normale a $CK$, si chiami $CL=y$, sarà, per la proprietà del circolo, $HL=\sqrt{rr-yy}$, e condotto il raggio $CH$, per la similitudine dei triangoli $HLC$, $CDE$, avremo $DE=\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}$. Ma poichè l'angolo $FHC$ deve essere eguale all'angolo $CHI$, per la condizione del problema, e $CHI=CED$, per le parallele $FB$, $HI$, e $CED=FEH$, dunque $FHC=FEH$, e però $FE=FH$, ma $FH=HI=2y$, dunque $FE=2y$, e tutta la $FD$ sarà $=2y+\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}$, ma $FD=f$; dunque $2y+\frac{ay}{\sqrt{rr-yy}}=f$, e togliendo l'asimmetrìa, sarà

$y^4-fy^3+\frac{ffyy+aayy}{4}-rryy+frry-\frac{ffrr}{4}=0$, cioè (essendo $rr=ff+aa$) $y^4-fy^3-\frac{3rryy}{4}+frry-\frac{ffrr}{4}=0$,

equazione del quarto grado, la quale colle maniere già spiegate si potrà costruire, servendosi di que' luoghi conici, che più piaceranno. Ma quest' equazione è divisibile per $y-f$, ed il quoziente è l'equazione $y^3-\frac{3rry}{4}+\frac{frr}{4}=0$, che voglio costruire colla parabola,

e

e l'iperbola fra gl'asintoti; faccio adunque $yy=rz$, sarà, fatta la sostituzione, $zy-\frac{3ry}{4}+\frac{fr}{4}=0$, equazione all' iperbola.

Sia (*Fig.* 121.) $AR=\frac{1}{2}r$, ed $AB=\frac{1}{2}f$; prodotte indefinitamente dall'una, e dall'altra parte le $AR$, $AB$, fra esse come asintoti si descriva l'iperbola $TP\ tp$, che passerà per lo punto $O$; indi presa la $RC=\frac{1}{4}r$, e dal punto $C$ condotta la $CI$ indefinita, e parallela ad $AL$, se si prenda una qualunque $CI=y$, sarà $IP=z$, e l'iperbola il luogo dell'equazione $zy-\frac{3ry}{4}+\frac{fr}{4}=0$. Al vertice $C$, diametro $CM$, parametro $=r$ si descriva la parabola $NCH$, taglierà questa l'iperbola nei tre punti $T, P, N$, dai quali condotte le $TS$, $PQ$, $NM$ parallele ad $AL$, saranno esse le tre radici dell'equazione.

E' chiaro, che la parabola taglia l'iperbola $TP$ nei punti $T$, $P$, poichè essendo $CR=\frac{r}{4}$, posto questo valore in luogo di $z$ nell'equazione alla parabola $yy=rz$, ci dà $y=\frac{1}{2}r$, ma $\frac{1}{2}r$ è sempre maggiore di $\frac{1}{2}f$, adunque l'ordinata nella parabola corrispondente al punto $R$ sarà maggiore di $RO$, e però la parabola passerà al di dentro dell'iperbola.

Ma giacchè è dato il circolo nel problema, tornerà

rà molto meglio il servirsi di questo per la costruzione, coll'introdurlo prima di giungere all'equazione finale, e ciò col porre la linea $HL$ (*Fig.* 120.), cioè $\sqrt{rr - yy} = z$; sarà adunque $DE = \frac{ay}{z}$, e $DF = 2y + \frac{ay}{z}$, e però l'equazione $2y + \frac{ay}{z} = f$, cioè $2yz + ay = fz$, luogo all'iperbola fra gl'asintoti.

Divisa per metà la $DF$ in $P$, (*Fig.* 122.) per lo punto $P$, si conduca la indefinita $PN$ parallela ad $AC$, e presa $QO = \frac{1}{2}a$, per lo punto $O$ si conduca $V\Delta$ indefinita, e parallela a $KC$. Fra gl'asintoti $PN$, $V\Delta$ si descriva l'iperbola del rettangolo $\frac{af}{4}$, la quale passerà per lo punto $C$, e prese le $y$ sulla linea $CQ$ positive verso il punto $K$, le corrispondenti ordinate saranno $z$, e l'iperbola il luogo dell'equazione $2zy + ay - fz = 0$.

Taglierà questa il circolo ne' quattro punti $H$, $R$, $M$, $S$, dai quali condotte perpendicolari ad $AC$ le $HX$, $RG$, $MY$, $ST$, saranno esse le radici dell'equazione, tre positive $HX$, $RG$, $MY$, ed una negativa $ST$.

E' chiaro, che la radice $HX$, o sia $CL$ serve per la divisione del dato arco $FAB$; siccome la radice $YM$ serve per la divisione del residuo $FMB$ a tutto il circolo, imperciocchè se mi fossi proposta di dividere l'arco $FMB$, avrei avuta la medesima equazione, o sia il medesimo luogo.

La

La radice $RG$ a nulla ferve, ma fi avverta però, che ella è $=f$, cioè quella, per cui è divifibile l'equazione, che rifulta dai due luoghi $rr-yy=zz$, $2zy+ay-fz=0$, cioè l'equazione folida ritrovata di fopra $y^4-fy^3$ ec.

E per dimoftrarlo, prefa $O\omega=\frac{1}{2}a=OQ$, farà l'ordinata corrifpondente del circolo $GR=f$, ma $\omega G=PD=\frac{1}{2}f$, dunque $\omega R=\frac{1}{2}f$; ma il rettangolo coftante dell'iperbola è $\frac{af}{4}$, dunque l'iperbola taglierà il circolo nel punto $R$, e però la radice $RG$ corrifpondente a quefto punto è $=f$.

L'altra radice $TS$ ferve per la divifione in tre parti eguali di tutto il circolo, il che fi può in quefto modo dimoftrare.

Poichè $FD=RG$, faranno eguali gl'archi $FK$, $KR$, e però prodotta la $RG$ in $Z$, farà l'arco $FAB=RMZ$, farà adunque $FR$, o fia $BZ$ metà della differenza dei due archi $FAB$, $FMB$; ma fe fi fcioglierà il problema relativamente all'arco $BZ$, fi troverà la fteffa iperbola $HCS$, e farà $ZS$ un terzo dell'arco $BZ$, cioè un terzo della metà della differenza degl'archi $FAB$, $FMB$, e però $BS$ un terzo della detta differenza; ma $HB$ è due terzi di $FAB$, e però un terzo della fomma dei due archi $FAB$, $RMZ$, dunque la fomma di $HB$, e

$BS$,

*BS*, cioè l'arco *HS* farà la terza parte di tutto il circolo, il che ec.

216. Questo Problema è stato sciolto in un' altra maniera al num. 110., e si è veduto, che nel caso, che il dato angolo sia retto il Problema è piano. Negl' altri due casi dell'angolo ottuso, ed acuto sono giunta alle due equazioni cubiche $2bx^3 - 3aaxx + a^4 = 0$, $2bx^3 + 3aaxx - a^4 = 0$.

Ma se si rifletta, che presa nella prima equazione, che serve per l'angolo ottuso, la $x$ negativa, si muta essa nella seconda, che serve per l'angolo acuto, basterà costruire l'equazione del primo caso, poichè la radice negativa di questo darà la soluzione per l'altro.

Moltiplico adunque la prima equazione per $x = 0$, a fine di ridurla del quarto grado, e la divido per $2b$, farà essa pertanto $x^4 - \frac{3aax^3}{2b} + \frac{a^4x}{2b} = 0$.

Prendo l'equazione alla parabola $xx - \frac{3aax}{4b} = ay$, e fattone il quadrato, farà $x^4 - \frac{3aax^3}{2b} + \frac{9a^4xx}{16bb} = aayy$, onde sostituito in luogo dei primi due termini $x^4 - \frac{3aax^3}{2b}$ il loro valore, farà $yy - \frac{9aaxx}{16bb} + \frac{aax}{2b} = 0$.

Sostituisco in luogo di $xx$ il suo valore $ay + \frac{3aax}{4b}$, ed

ed ô l'equazione $yy - \frac{9a^3y}{16bb} - \frac{27a^4x}{64b^3} + \frac{aax}{2b} = 0$, a cui aggiunta la prima $xx - \frac{3aax}{4b} - ay = 0$, farà finalmente $yy - \frac{9a^3y}{16bb} - \frac{27a^4x}{64b^3} + \frac{aax}{2b} + xx - \frac{3aax}{4b} - ay = 0$, equazione al circolo, prese le coordinate in angolo retto.

Al raggio $CG = \sqrt{mm + nn}$ (fatta per brevità $2m = \frac{9a^3 + 16abb}{16bb}$, e $2n = \frac{27a^4 + 16aabb}{64b^3}$) si descriva il circolo $MNH$, e presa $CD = m$, (*Fig.* 125.) si conduca dal punto $D$ la $DA$ perpendicolare a $CD$, ed eguale ad $n$, che incontrerà nel punto $A$ la periferìa del circolo; per lo punto $A$ si tiri $AK$ parallela ad $RG$, presa una qualunque $AK = y$, sarà la corrispondente ordinata $KH = x$, ed il circolo il luogo dell'equazione.

Sulla retta $AD$ si prenda $AI = \frac{3aa}{8b}$, e per lo punto $I$ condotta $LO$ parallela ad $AK$, se ne prenda la porzione $IL = \frac{9a^3}{64bb}$, ed al vertice $L$, asse $LO$, parametro $= a$, si descriva la parabola apolloniana $ALH$; prese dal punto $A$ le assisse $y$ sull'asse $AK$, saranno le corrispondenti ordinate $KH = x$, e la parabola il luogo dell'equazione $xx - \frac{3aax}{4b} = ay$, la quale incontrerà il

circolo nei quattro punti $A$, $M$, $H$, $N$; il punto $A$ mi dà la radice da me introdotta eguale a zero, e le tre perpendicolari $QM$, $PN$, $KH$ alla $AK$ mi daranno le tre radici dell'equazione. La prima $QM$ positiva servirà per l'angolo ottuso; la seconda negativa $PN$ per l'angolo acuto; la terza $KH$ servirà per dividere in tre parti eguali l'angolo, che è la differenza tra l'angolo dato, e l'angolo retto.

E che ciò sia vero; sia (*Fig.* 123.) l'angolo dato $MAB$, ad $AB$ sia perpendicolare $AH$, e si voglia dividere in tre parti eguali l'angolo $MAH$, differenza fra il dato $MAB$, e l'angolo retto $HAB$. Si supponga esser diviso dalle rette $AC$, $AD$, ripetuto il discorso del num. 110., sarà $AC = CD$, ed il triangolo $ACH$ simile al triangolo $DAH$, e però si avrà l'analogìa $CH, HA :: HA, DH$.

Denominando adunque, come nel citato num. 110., $AB = a$, $BR = b$, e chiamata $BC = x$, sarà $RC = x - b$, $BH = \frac{aa}{b}$, $CH = x - \frac{aa}{b}$, $AR = \sqrt{aa - bb}$, $HA = \frac{a}{b}\sqrt{aa - bb}$,

$AC = \sqrt{aa + xx - 2bx}$, $DH = x - \frac{aa}{b} + \sqrt{aa + xx - 2bx}$,

e però sostituiti nell'analogìa i valori analitici, sarà

$$x - \frac{aa}{b}, \frac{a}{b}\sqrt{aa - bb} :: \frac{a}{b}\sqrt{aa - bb}, x - \frac{aa}{b} + \sqrt{aa + xx - 2bx},$$

cioè l'equazione

$$\frac{aa}{bb}\times\overline{aa-bb}=\overline{x-\frac{aa}{b}}\times\overline{x-\frac{aa}{b}+\sqrt{aa+xx-2bx}}\text{, la}$$

quale ridotta, e finalmente divisa per $aa-bb$ si trova essere $2bx^3-3aaxx+a^4=0$, che è appunto l'equazione, che si â costruita.

Oltre gl'angoli minori di due retti, che insistono ad archi minori del semicircolo, e che *Entranti* s'appellano dagli Architetti, si danno pure degl'angoli maggiori di due retti, che insistono ad archi maggiori del semicircolo, e che si chiamano *Salienti*. Si consideri, come positiva, la inclinazione delle due linee $AB$, $AM$, (*Fig.* 124.) che mira verso $C$, negativa quella, che mira verso $D$. Sino a tanto, che la inclinazione delle due linee $AB$, $AM$ sarà positiva, e mirerà verso $C$, l'angolo $MAB$ sarà entrante, minore di due retti, ed insisterà ad un'arco $BCM$ minore del semicircolo. Se le due linee $A2B$, $A2M$ formeranno una linea retta $2B2M$, l'inclinazione sarà nulla. Ma se l'inclinazione diverrà negativa, piegando le linee $A3B$, $A3M$ dalla parte di $D$, allora l'angolo $3MA3B$ si trasformerà in saliente, maggiore di due retti, ed insisterà ad un'arco $3MC3B$ maggiore del semicircolo. La trisezione adunque di un qualunque angolo dato può anco richiedersi di angolo saliente.

Ora si consideri, che insistendo la linea *AB* sopra la linea *MAE*, ( *Fig.* 123. ) mentre si forma l'angolo *MAB*, nascono di conseguenza altri tre angoli, cioè l'entrante *BAE*, che unito al parimente entrante dato *MAB* compie i due retti, ed i salienti *MAB*, *BAE*, che uniti ai corrispondenti entranti compiscono i quattro retti.

Le tre radici perciò della nostra equazione $2bx^3 - 3aaxx + a^4 = 0$ servono a tripartire tutti e quattro i mentovati angoli. Col mezzo della più piccola positiva si divide in tre parti eguali l'angolo ottuso *MAB*, e col mezzo della negativa l'angolo acuto *BAE*, come si è veduto; ma si è altresì veduto, che la maggiore positiva serve per l'angolo *MAH*, ora questa appunto serve altresì per tripartire ambedue i salienti *MAB*, *BAE*. E vaglia il vero: l'angolo saliente *BAE* si eguaglia a tre retti più l'angolo *MAH*; la terza parte adunque dell'angolo saliente *BAE* dovrà essere eguale ad un retto più la terza parte dell'angolo *MAH*, e tale si è l'angolo *CAB*. Non altrimenti l'angolo saliente *MAB* equivale a tre retti meno l'angolo *MAH*, o sia *hAE*, e conseguentemente *cAB* sarà la sua terza parte, siccome eguale al retto *hAB* meno l'angolo *hAc* terza parte dell'angolo *hAE*.

217. Se per dividere il dato angolo in tre parti eguali, mi fossi servita del Problema XIII. num. 108., sarei giunta

giunta all'equazione $x^3 - 3bxx - 3rrx + brr = 0$, e moltiplicandola per $x = 0$, $x^4 - 3bx^3 - 3rrxx + brrx = 0$. Quindi preso il luogo alla parabola $xx - \frac{3bx}{2} = by$, e fatto il rimanente al solito, si avrà un' altro luogo al circolo, prese le coordinate in angolo retto, cioè

$$yy - \frac{26b^3y - 24brry}{8bb} - \frac{39b^3x - 28brrx}{8bb} + xx = 0.$$

Descritti, e combinati questi due luoghi, mi daranno la stessa costruzione della Figura 125., diversa solo nelle quantità cognite; imperciocchè sarà in questo caso il raggio del circolo $CG = \sqrt{mm + nn}$ (fatta per brevità $2m = \frac{26b^3 + 24brr}{8bb}$, e $2n = \frac{39b^3 + 28brr}{8bb}$), e sarà $CD = \frac{26b^3 + 24brr}{16bb}$, $DA = \frac{39b^3 + 28brr}{16bb}$, $AI = \frac{3b}{4}$, ed $IL = \frac{9b}{16}$.

218. Dallo stesso Problema si â la maniera generale per dividere un qualunque dato arco, o angolo in quante si vogliano parti eguali; cosicchè per dividerlo in cinque parti eguali, si â l'equazione

$$\frac{5r^4x - 10rrx^3 + x^5}{r^4 - 10rrxx + 5x^4} = b, \text{ cioè}$$

$$x^5 - 5bx^4 - 10rrx^3 + 10brrxx + 5r^4x - br^4 = 0.$$

Per costruirla, prendo il luogo alla parabola apolloniana

na $xx = ry$, e fatte le sostituzioni, nasce il secondo del terzo grado

$$xyy - 5byy - 10rxy + 10bry + 5rrx - brr = 0,$$

cioè $x = \frac{5byy - 10bry + brr}{yy - 10ry + 5rr}$.

Descritto adunque il luogo di questa equazione, che sarà (*Fig.* 126.) la curva dei tre rami, cioè $HT$ fra gl'asintoti $RK$, $BC$; $GMQ$ fra gl'asintoti $DI$, $KR$, ed $fniL$ fra gl'asintoti $DF$, $DI$, in cui sull'asse $AV$ sono le $y$, e le corrispondenti ordinate sono le $x$. Se al vertice $A$, col parametro $= r$, all'asse $AV$ si descriverà la parabola dell'equazione $xx = ry$, incontrerà essa la curva in cinque punti $o$, $M$, $T$, $i$, $Q$, i quali determineranno le cinque radici $or$, $MN$, $TV$, $Si$, $PQ$, tre positive, e due negative dell'equazione proposta.

219. Così per dividere, in quante altre parti eguali si vuole di numero dispari maggiore, un'arco, o angolo dato, altre curve ritroveransi relativamente al grado dell' equazione.

CAPO

## C A P O V.

*Della costruzione de' luoghi, che superano il secondo grado.*

220. IN due diverse maniere si possono costruire i luoghi, vale a dire descrivere le curve espresse da equazioni, che superano il secondo grado, se però nell'una, e nell'altra maniera può dirsi descrivere, e non piuttosto adombrare, e fare qualche idea di tali curve.

La prima maniera è per via d'infiniti punti; la seconda col mezzo di altre curve di grado inferiore, e già descritte, così che un luogo, o sia equazione del terzo grado si costruisca col mezzo di una retta, e di una sezione conica; un luogo, o equazione del quarto col mezzo di due sezioni coniche; un luogo, o equazione del quinto, col mezzo di una sezione conica, e d'un luogo del terzo, e così di mano in mano per ordine.

221. E quanto alla prima maniera per via d'infiniti punti; in primo luogo fa d'uopo ridurre l'equazione in modo, che una delle due incognite, cioè quella, che ci tornerà più comoda, sia libera da frazioni, da coefficienti, e che sia di una sola dimensione, e posta sola da una parte del segno d'egualità, il che si potrà sempre

pre fare coi metodi ſpiegati al Capo II., qualora riſpetto a tale incognita ( conſiderando l'altra, come una coſtante ) l'equazione ſia di natura ſua piana, cioè non ecceda il ſecondo grado; come per eſempio l'equazione $xyy + 2aay = x^3$, cioè $yy + \frac{2aay}{x} = xx$, la quale trattata con le regole delle quadratiche affette ci dà

$$y = \frac{-aa \pm \sqrt{x^4 + a^4}}{x}.$$

In queſto modo date, o ridotte le equazioni, la maniera di coſtruire il luogo, o ſia la curva da eſſe eſpreſſa, conſiſte nel dare all'una delle due incognite, cioè a quella, che è nell'omogeneo di comparazione, ( preſa da un punto fiſſo ſopra una retta, che ſerva per aſſe, o diametro, ſecondo che l'angolo delle coordinate deve eſſere retto, o obbliquo ) come ſarebbe alla $x$ nell'equazione $y = \frac{-aa \pm \sqrt{x^4 + a^4}}{x}$; nel dare, diſſi, un valore arbitrario, per mezzo di cui viene ad eſſere dato neceſſariamente il valore dell'altra, cioè della $y$, la quale dall'eſtremità del valore della prima eſſendo alzata nel dato angolo delle coordinate, ci forniſce un punto della curva da deſcriverſi; un'altro valore, che ſi dia alla ſteſſa incognita $x$, ſomminiſtra un'altro valore della $y$, cioè un'altro punto della curva, e così di mano in mano aſſegnando altri valori alla $x$, altri ſe ne ave-

averanno della $y$, i quali ci daranno altrettanti punti della curva, il numero de' quali quanto più sarà grande, tanto più sarà esatta la descrizione della curva stessa, e si avrà perfettamente esatta allora solamente, quando se ne abbiano infiniti, anzi un numero infinitamente infinito di tali punti.

222. A motivo di maggiore semplicità supporrò sempre in appresso, che le curve sieno riferite agl'assi, cioè, che l'angolo delle coordinate sia retto, giacchè nel caso, che l'angolo sia obbliquo nessun'altra alterazione succede, che nel dato angolo stesso.

223. Per più facilmente intendere la applicazione del metodo, prendo per primo un'esempio semplice di curva già nota, cioè dell'iperbola equilatera $yy = xx - aa$, vale a dire $y = \pm\sqrt{xx - aa}$.

Sia $A$ il punto fisso principio delle $x$ da prendersi sull'indefinita $AE$. (*Fig.* 127.) In primo luogo cerco, quale ordinata corrisponda al punto $A$, cioè cosa sia la $y$ quando $x = 0$; sostituito adunque il zero in luogo della $x$ nella data equazione, troverassi $y = \pm\sqrt{0 - aa}$, cioè $y$ immaginaria, dunque al punto $A$ non corrisponde alcun punto in curva. Se fatta $x = 0$, avessi dall'equazione non $y$ immaginaria, ma $y = 0$, la curva principierebbe dal punto $A$. Osservo, che qualora sia $x$ minore di $a$, la radicale $\sqrt{xx - aa}$ sarà sempre di quan-

tità negativa, e però $y$ immaginaria, adunque fatta $AB=a$, ad una qualunque $x$ minore di $AB$ corrisponderà sempre $y$ immaginaria, cioè nessun punto in curva. Prendo $x=a=AB$, sarà $y=\pm\sqrt{aa-aa}=0$, e però $B$ sarà un punto in curva, vale a dire la curva avrà origine nel punto $B$. Prendo $x=2a=AC$, sarà $y=\pm\sqrt{4aa-aa}$, cioè $y=\pm\sqrt{3aa}$, positiva, e negativa; fatta adunque $CD$ positiva, e $Cd$ negativa $=\sqrt{3aa}$, saranno i due punti $D$, $d$ in curva. Prendo $x=3a=AE$, sarà $y=\pm\sqrt{8aa}$, fatta perciò $EM$ positiva, ed $Em$ negativa $=\sqrt{8aa}$, saranno i due punti, $M$, $m$ in curva; e così di mano in mano dando altri valori alla $x$ si averanno altri valori della $y$. E' facile il vedere, che crescendo la $x$ crescerà sempre la quantità $\sqrt{xx-aa}$, cioè il valore della $y$ positiva, e negativa di modo, che s'anderà sempre più allargando la curva, ed allontanando al di sopra, e di sotto dell'asse, e prendendo finalmente $x$ infinita, poichè il sottrarre quantità finita da infinita è lo stesso, che sottrarre nulla, sarà pure lo stesso $\sqrt{xx-aa}$, che $\sqrt{xx}$, quindi avrassi $y=\pm\sqrt{xx}$, cioè $y=\pm x$; dunque $y$ positiva, e negativa infinita, e però anderà in infinito la curva.

224. E perchè nell'equazione $y=\pm\sqrt{xx-aa}$ la incognita $x$ è elevata a potestà pari, cioè al quadrato, se

se si prenda la $x$ negativa, nulla si altera l'equazione stessa, quindi è, che dando alla $x$ dei valori negativi, cioè prendendola dalla parte di $A$ verso $F$, descriverassi la stessa curva di prima, ma posta al contrario col vertice $H$, essendo $AH = AB$, ed a nessuna assissa $x$ positiva, o negativa presa tra $B$, ed $H$ corrispondera ordinata $y$ positiva, o negativa reale, vale a dire nessun punto di curva.

225. Sebbene manifestamente si vede, che la data curva in nessun punto fuori de' vertici $B$, $H$ taglia l'asse, poichè crescendo la $x$, cresce sempre la $y$, nulla di meno però di moltissime succede, che oltre il vertice in altri lo taglino, nel qual caso la $y$ deve necessariamente essere zero; adunque per avere questi punti si dovrà nella data equazione suppore $y = o$, e ricavare i valori della $x$ in questa supposizione, i quali ci daranno i punti cercati. Supposta per tanto nell' equazione $yy = xx - aa$ la $y = o$, sarà $xx = aa$, cioè $x = \pm a$, adunque ne' soli punti $B$, $H$ la curva taglia l'asse, e non in altri.

226. Se fra i punti $B$, $C$ si prenderanno altri valori della $x$, altri valori corrispondenti si avranno pure della $y$, cioè altri punti di curva tra $B$, e $D$, ovvero $d$ per modo, che quanti più punti tali si avranno, più esatta sarà la descrizione della parte $BD$, o $Bd$, nè si avrà mai perfetta, se non quando i punti siano infiniti.

Nella ſteſſa maniera ſi diſcorra di qualunque altra porzione .

227. E' chiaro , che ſe fatta infinita una qualunque delle due incognite , l'altra non ſia nè infinita, nè immaginaria , ma o ſia finita, o eguale al zero, ſarà la prima un' aſintoto della curva , il quale corriſponderà al punto determinato dal valore della ſeconda . Per vedere adunque ſe una curva â aſintoti , e dove , baſterà fare la $y$ infinita , e vedere qual valore riſulta dalla equazione per la $x$ ; indi fare infinita la $x$ , e vedere qual valore riſulta per la $y$ . Nell'equazione $y = \pm \sqrt{xx - aa}$, fatta $y$ infinita, ſarà $\sqrt{xx - aa} = \infty$, e però $xx = \infty + aa$, cioè $xx$ eguale all'infinito , e però $x$ infinita, perchè la radice di quadrato infinito è ſempre infinita ; adunque la $y$ non può eſſere infinita , ſe non quando ſia infinita anche la $x$ , ond' è che l'aſſe delle $y$ non può eſſere un'aſintoto . Fatta infinita la $x$ , ſarà $\sqrt{xx - aa}$ lo ſteſſo che $x$ , poichè a quantità infinita l'aggiungere , o levare quantità finita è lo ſteſſo , che aggiungere , o levare nulla , adunque ſarà la $y = \pm x$, cioè fatta $x$ infinita , è infinita anche la $y$ , quindi l'aſſe delle $x$ non potrà eſſere un'aſintoto .

228. Non così nell'equazione $ay + xy = bb$ , che già altronde ſi ſa eſſere all'iperbola fra gl'aſintoti ; imperciocchè preſa $y$ infinita , ſaranno infiniti i due termi-

ni $ay + xy$ , e riſpetto a loro ſarà nullo il termine $bb$ , e però l'equazione ſarà $ay + xy = o$ , cioè dividendo per $y$, $x = -a$ , adunque preſa $x = -a$, l'ordinata , che in quel punto è infinita, ſarà un'aſintoto della curva . Preſa poi $x$ infinita , poichè i due rettangoli $ay$ , $xy$ nella ſteſſa altezza $y$ ſono tra loro , come le baſi $a$, $x$, ſarà il ſecondo infinitamente maggiore del primo , cioè ſarà nullo $ay$ riguardo ad $xy$ ; e però cancellato dall' equazione il termine $ay$ , reſterà $xy = bb$ , o ſia $y = \frac{bb}{x}$ , ma $x$ è infinita , dunque $y = \frac{bb}{\infty} = o$ ; ſicchè quando $y = o$ , la $x$ è infinita , e però è un'aſintoto della curva .

229. Si avverta però , che queſto metodo â luogo ſolamente nel caſo degl'aſintoti paralleli alle coordinate , e non altrimenti ; ed in fatti l'iperbola $yy = xx - aa$ â beniſſimo i ſuoi aſintoti , ma che non ſono alle coordinate paralleli , e però in queſto caſo non ſerve la maniera ſpiegata , ma ci vuole altro artifizio , il quale perchè dipende dal metodo degl' infiniteſimi , fa d'uopo riſervarlo per altro luogo .

230. Rimane il vedere , ſe la ſuddetta curva $y = \pm \sqrt{xx - aa}$ ſia concava , o conveſſa all'aſſe , per la qual coſa prendaſi dall'origine una qualunque aſſiſſa $AE$ di determinato valore , e col mezzo della data

equa-

equazione si ritrovi il valore della corrispondente ordinata $EM$; indi presa un'altra assissa $AC$ di determinato valore minore della prima, si trovi il valore della corrispondente ordinata $CD$, e si conduca la retta $BM$, che taglierà in $I$ la $CD$ prodotta, se fa di bisogno, ed essendo note le $AE$, $AC$, o sia le $BE$, $BC$, e la ordinata $EM$, per la similitudine de' triangoli $BEM$, $BCI$ troverassi il valore della $CI$, e se questa sarà minore di $CD$, la curva sarà concava all'asse $AE$, com' è chiaro; e se sarà maggiore, la curva sarà convessa. Nella data equazione prendo $x = AE = 3a$, sarà $y = \sqrt{8aa}$, prendo $x = AC = 2a$, sarà $y = CD = \sqrt{3aa}$, e poichè $BE = 2a$, $BC = a$, sarà $CI = \frac{\sqrt{8aa}}{2} = \sqrt{2aa}$, cioè minore di $CD$, e però la curva concava all'asse $AE$.

231. Vale però quest'illazione in quelle curve solamente, le quali non abbiano punti di flesso contrario, o di regresso; ma perchè questi ànno i loro metodi particolari, de' quali non è questo il luogo di trattare, quindi è, che per ora non si può formare un'idea giusta, e compita delle curve.

ESEM-

## ESEMPIO II.

Sia l'equazione $y^3 = aax$, cioè $y = \sqrt[3]{aax}$; condotte le due indefinite $BH$, $DC$, (*Fig.* 128.) che facciano l'angolo dato $BAC$ eguale a quello delle coordinate, si prendano nella $AC$ dal punto $A$ le $x$, e sulla $AB$, o sia parallele alla $AB$ le $y$. Cerco primieramente, se la curva passa, o nò per lo punto $A$, cioè cosa sia $y$ quando $x = 0$; ma posta $x = 0$, si trova $y = \sqrt[3]{aa \times 0}$, cioè $y = 0$, adunque la curva passa per lo punto $A$. Cerco in oltre, se la curva taglia l'asse $AC$ in altro punto, vale a dire cosa sia la $x$, posta $y = 0$, e trovo $\sqrt[3]{aax} = 0$, cioè $x = 0$; adunque in nessun'altro punto fuori di $A$ la curva taglia l'asse. Faccio $x = AM = \frac{1}{2}a$, e sarà la data equazione $y = \sqrt[3]{\frac{a^3}{2}}$, e però alzata $MP = \sqrt[3]{\frac{a^3}{2}}$, e parallela ad $AB$, sarà $P$ un punto in curva. Faccio $x = AC = a$, e sarà $y = \sqrt[3]{a^3} = a$, alzata adunque $CN = a$, e parallela ad $AB$, sarà $N$ un'altro punto in curva; e così facendo successivamente, si troveranno quanti punti si vogliono, per i quali

passa

paſſa la curva della data equazione. Faccio finalmente $x$ infinita, cioè $x = \infty$, e ſarà $y = \sqrt[3]{aa \times \infty}$, cioè $y$ infinita, e però la noſtra curva va all'infinito. E poichè preſa $x = 0$, è pure $y = 0$; e preſa $x = \infty$, è pure $y = \infty$, la curva non avrà aſintoti paralleli alle coordinate.

Si conduca la ſotteſa $AN$, che taglia in $I$ la $MP$ prodotta, ſe fa biſogno; poichè $AM = \frac{1}{2}a$, $AC = a$, $CN = a$, ſarà $MI = \frac{1}{2}a$, ma $MP = \sqrt[3]{\frac{a^3}{2}}$, adunque $MI$ ſarà minore di $MP$, e però la curva concava all'aſſe $AC$.

Si prenda ora la aſſiſſa $x$ negativa. Poichè nella data equazione $y^3 = aax$ la $x$ è di eſponente diſpari, quando ſi prenda negativa dovrà mutare il ſegno, e l'equazione ſarà queſt'altra $y^3 = \sqrt[3]{-aax}$, la quale, come chiaramente ſi vede, prendendo i valori della $x$ dalla parte dei negativi, cioè da $A$ verſo $D$, ma eguali ai già preſi della parte dei poſitivi, ci darà altrettanti valori negativi della $y$ eguali ai poſitivi, quindi il ramo $AE$ ſarà affatto lo ſteſſo del ramo $AN$, ma poſto in ſenſo contrario.

ESEM-

## ESEMPIO III.

Sia l'equazione $a^3 - zyy = 0$, cioè $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{z}}$, e si prendano le $z$ dal punto $A$ sull'asse $AC$. (*Fig.* 129.) Cerco primieramente, se la curva passi per lo punto $A$, fatta adunque $z = 0$, l'equazione è $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{0}}$, cioè $y = \pm\infty$, adunque $BD$ infinita d'ambe le parti di $A$ sarà un'asintoto della curva. Cerco se in nessun punto la curva tagli l'asse, e però pongo $y = 0$, e l'equazione sarà $\pm\sqrt{\frac{a^3}{z}} = 0$, cioè $0 = \frac{a^3}{z}$, vale a dire $z = \frac{a^3}{0}$, e però $z = \infty$, adunque quando sia $y = 0$ sarà $z = \infty$, e però $AC$ sarà un'altro asintoto. Presa $z = a = AE$, sarà $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{a}}$, cioè $y = \pm a$, fatte adunque $EF$ positiva, ed $EG$ negativa $= a$, saranno i punti $F$, $G$ in curva. Presa $z = 2a = AH$, sarà $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{2a}}$, cioè $y = \pm\sqrt{\frac{aa}{2}}$, fatte adunque $HI$ positiva, ed $HK$ negativa $= \sqrt{\frac{aa}{2}}$, saranno i punti $I$, $K$ in curva. Prendendo successivamente nuovi valori di $z$ sempre maggiori, risulteranno

nuovi valori della $y$ sempre minori di modo, che i due rami $FI$, $GK$ in tutto simili, ed eguali della curva s'anderanno dall'una, e dall'altra parte accostando agl' asintoti $BD$, $AC$, senza però mai toccarli, se non in infinita distanza dal punto $A$.

Rispetto alle assisse $z$ negative, poichè l'esponente di $z$ è dispari, se si prenda negativa, converrà mutare il segno al termine $-zyy$, e l'equazione sarà $a^3 + zyy = o$, cioè $y = \pm \sqrt{\frac{-a^3}{z}}$, vale a dire l'ordinata $y$ immaginaria, adunque dalla parte delle assisse negative non vi sarà curva.

Per vedere, se la curva sia concava, o convessa all' asse $AC$; prendo $AC = 3a$, sarà $CM = \sqrt{\frac{aa}{3}}$, e condotta $FM$, che tagli in $O$ la $HI$ prodotta, se fa bisogno, ed $MN$ parallela ad $AC$, sarà $NF = a - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, $PI = \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, e facendo l'analogìa $MN, NF :: MP, PO$, cioè $2a, a - \sqrt{\frac{aa}{3}} :: a, PO$, sarà $PO = \frac{a - \sqrt{\frac{aa}{3}}}{2}$, adunque se $PO$ sarà maggiore di $PI$, la curva sarà convessa all' asse $AC$, il che si ricerca così. Quando

sia

ſia $\frac{a-\sqrt{\frac{aa}{3}}}{2} > \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, ſarà anche, moltiplicando per 2, $a-\sqrt{\frac{aa}{3}} > 2\sqrt{\frac{aa}{2}} - 2\sqrt{\frac{aa}{3}}$, ed $a+\sqrt{\frac{aa}{3}} > 2\sqrt{\frac{aa}{2}}$, e quadrando, $aa + 2a\sqrt{\frac{aa}{3}} + \frac{aa}{3} > 2aa$, e moltiplicando per 3, $3aa + 6a\sqrt{\frac{aa}{3}} + aa > 6aa$, e riducendo i termini, $6a\sqrt{\frac{aa}{3}} > 2aa$, e dividendo per $2a$, $3\sqrt{\frac{aa}{3}} > a$, e finalmente quadrando, ſarà $\frac{9aa}{3} > aa$, ma è vero, che $\frac{9aa}{3} > aa$, adunque è anche vero, che $\frac{a-\sqrt{\frac{aa}{3}}}{2} > \sqrt{\frac{aa}{2}} - \sqrt{\frac{aa}{3}}$, cioè, che $PO$ è maggiore di $PI$, ed in conſeguenza, che la curva è conveſſa all'aſſe $AT$.

## ESEMPIO IV.

Sia la curva dell' equazione

$y = \pm\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx \pm a\sqrt{aa + 8ax}}{2}}$. Prendendo ſulla $AB$ indefinita (*Fig.* 130.) le $x$ dal punto fiſſo $A$, e

le $y$ sulla $AD$, che faccia l'angolo $DAB$ delle coordinate, se si ponga $x = o$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{aa \pm a\sqrt{aa}}{2}}$, cioè $y = \pm \sqrt{\frac{2aa}{2}}$, ed $y = \pm \sqrt{\frac{o}{2}}$, vale a dire $y = \pm a$, ed $y = o$; adunque fatta $AE$ positiva, e negativa $= a$, i punti $E$, $A$, $E$ saranno in curva. Per vedere dove la curva tagli l'asse $AB$, pongo $y = o$, e però

$\pm \sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx \pm a\sqrt{aa + 8ax}}{2}} = o$, e quadrando, e trasponendo, $4ax + aa - 2xx = \mp a\sqrt{aa + 8ax}$, e di nuovo quadrando, $16aaxx + 8a^3x + a^4 + 4x^4 - 16ax^3 - 4aaxx = a^4 + 8a^3x$, e riducendo, e dividendo per $4xx$, $3aa - 4ax + xx = o$, e risolvendo l'equazione, $x = \pm a + 2a$, cioè $x = a$, ed $x = 3a$; presa adunque $x = AF = a$, ed $x = AB = 3a$, la curva taglierà l'asse ne' punti $F$, $B$. Fatta $x = \frac{1}{2}a = AH$, sarà $y = \pm \sqrt{\frac{5aa \pm 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, e però quattro i valori della $y$ reali, per essere $2a\sqrt{5aa}$ minore di $5aa$, e sono $\sqrt{\frac{5aa + 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $\sqrt{\frac{5aa - 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $-\sqrt{\frac{5aa - 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, $-\sqrt{\frac{5aa + 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, ed i due positivi sono relativamente eguali ai due negativi; presa adun-

adunque $HI = Hi = \sqrt{\frac{5aa + 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, ed $HG = Hg = \sqrt{\frac{5aa - 2a\sqrt{5aa}}{4}}$, i quattro punti $I$, $G$, $g$, $i$ saranno in curva.

232. Ogni qual volta la quantità sotto al comune vincolo radicale sia quantità negativa ( giacchè quella sotto al secondo vincolo, cioè $\sqrt{aa + 8ax}$ non lo può essere, essendo le assisse positive, come ora le suppongo ) sarà immaginaria la ordinata $y$, adunque perchè vi sia ordinata, converrà che sia

$$\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx \pm a\sqrt{aa + 8ax}}{2}} > 0.$$

Prendo in primo luogo il segno positivo del secondo radicale, nel qual caso sarà certamente positiva la quantità tutta, se sia $4ax + aa - 2xx > 0$, cioè $2xx - 4ax < aa$, e però $xx - 2ax < \frac{aa}{2}$, ed $xx - 2ax + aa < \frac{3aa}{2}$, e cavando la radice, $x - a < \sqrt{\frac{3aa}{2}}$, o pure $a - x < \sqrt{\frac{3aa}{2}}$. Dalla prima radice $x - a < \sqrt{\frac{3aa}{2}}$, in cui si suppone $x$ maggiore di $a$, inferisco, che deve poi essere $x < a + \sqrt{\frac{3aa}{2}}$; dalla seconda $a - x < \sqrt{\frac{3aa}{2}}$

in

in cui si suppone $x < a$ ricavo, che deve poi essere $x > a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$; ma essendo sempre $a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$ quantità negativa, sarà sempre $x > a - \sqrt{\frac{3aa}{2}}$, quando si prenda $x$ minore di $a$, adunque presa $x$ minore di $a$, sarà $4ax + aa - 2xx$ quantità positiva, quindi molto più sarà positiva la quantità $4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}$, e però generalmente, presa $x$ minore di $AF$ ($a$), sarà $y = \pm \sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}{2}}$, ordinata reale. Ma quando anche sia $4ax + aa - 2xx$ quantità negativa, pure può essere $\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}{2}}$ quantità positiva, cioè ogni qual volta sia $\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx + a\sqrt{aa + 8ax}}{2}} > 0$, e quadrando, e trasportando, $a\sqrt{aa + 8ax} > 2xx - aa - 4ax$, e di nuovo quadrando, $a^4 + 8a^3x > 4x^4 - 16ax^3 + 16aaxx - 4aaxx + 8a^3x + a^4$, cioè $4x^4 - 16ax^3 + 12aaxx < 0$, e dividendo per $4xx$, $xx - 4ax + 3aa < 0$, e però anche $xx - 4ax + 4aa < aa$, e cavando la radice, $x - 2a < a$, come pure $2a - x < a$. Dalla prima radice $x - 2a < a$, che suppone $x$ maggiore di $2a$, viene $x < 3a$, adun-

que

que presa $x$ maggiore di $2a$, ma minore di $AB$, $(3a)$ sarà la radicale positiva, e però reale la ordinata $y$. Dalla seconda radice $2a - x < a$, che suppone $x$ minore di $2a$, cavo $x > a$, adunque quando anco sia $x$ maggiore di $a$, e minore di $2a$, la radicale sarà positiva, e però reale l'ordinata $y$, ma si è veduto per primo, che presa $x$ minore di $a$, l'ordinta $y$ è reale, adunque generalmente sarà reale la ordinata $y$, purchè si prenda $x$ minore di $AB$ $(3a)$.

Prendendo il segno negativo del secondo radicale, dovrà essere $\sqrt{\frac{4ax + aa - 2xx - a\sqrt{aa + 8ax}}{4}} > 0$, e quadrando, $4ax + aa - 2xx > a\sqrt{aa + 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, e dividendo per $4xx$, sarà $xx - 4ax > -3aa$, e però anche $xx - 4ax + 4aa > aa$, e cavando la radice, $x - 2a > a$; come pure $2a - x > a$; dalla prima radice ricavo $x > 3a$, ma si è veduto, che $x > 3a$ ci dà il valore della $y$ immaginario quando il secondo radicale â il segno positivo, molto più adunque lo darà quando â il segno negativo, onde ommessa questa radice, faccio uso dell'altra $2a - x > a$, che mi dà $x > a$, adunque presa $x$ minore di $AF$, $(a)$ sarà positiva la quantità sotto il comune vincolo radicale, tanto se si prenda il segno positivo, quanto il negativo del secondo radicale, e però tra $A$, ed $F$ corrispon-

ponderanno quattro ordinate reali, due positive, e due negative relativamente eguali alle positive. Ma quando sia $x$ maggiore di $AF$, $(a)$ il segno negativo del secondo radicale dà ordinata immaginaria, e la dà reale il segno positivo, purchè sia $x$ minore di $AB$, $(3a)$ adunque tra $F$, e $B$ corrisponderanno due sole ordinate reali alla medesima assissa, una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva; ed oltre il punto $B$ saranno immaginarie.

Prendansi ora le assisse negative, cioè da $A$ verso $K$. In questo caso mutando nell'equazione il segno a tutti i termini, che ànno la $x$ d'esponente dispari, sarà

$y = \pm \sqrt{\frac{aa - 2xx - 4ax \pm a\sqrt{aa - 8ax}}{2}}$. Pongo $x = 0$,

sarà $y = \pm \sqrt{\frac{aa \pm a\sqrt{aa}}{2}}$, cioè $y = \pm a$, ed $y = 0$,

adunque i punti $E$, $A$, $E$ saranno in curva, come nel primo caso. Per vedere se la curva taglia l'asse, pongasi $y = 0$, e però $\sqrt{\frac{aa - 2xx - 4ax \pm a\sqrt{aa - 8ax}}{2}} = 0$,

e quadrando, e trasponendo, $aa - 2xx - 4ax = \pm a\sqrt{aa - 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, e dividendo per $4xx$, $xx + 4ax + 3aa = 0$, e risolvendo, $x = -2a \pm a$; la curva adunque taglierà l'asse quando sia $x = 0$, essendo stata fatta la divisione per $4xx$; quando sia $x = -3a$;

e

e quando ſia $x=-a$, cioè, per eſſere quantità negative, dalla parte oppoſta a quella, verſo cui ora ſi prendono le $x$, e però ſolo in $A$, $F$, $B$, come già ſi è veduto. Pongo $x=\infty$ per vedere ſe la curva va all'infinito, o all'aſintoto $AK$, ed è

$y=\pm\sqrt{-2\times\overline{\infty}^2\pm\sqrt{-8a\times\infty}}$, cioè $y$ immaginaria. Ricerco adunque, quale ſia il limite delle ordinate reali: è certo, che qualora ſia $x$ maggiore di $\frac{a}{8}$, il ſecondo radicale ſarà di quantità negativa, e però immaginaria la ordinata $y$, adunque deveſi prendere $x$ non maggiore di $\frac{a}{8}$; ma in queſta ipoteſi perchè ſia poſitiva tutta la quantità ſotto il comune radicale, prendendo il ſegno poſitivo del ſecondo, baſterà, che ſia $aa-2xx-4ax$ poſitiva, cioè $aa-2xx-4ax>0$, e però $xx+2ax<\frac{aa}{2}$, o ſia $x<\sqrt{\frac{3aa}{2}}-a$; ma quando ſia $x$ non maggiore di $\frac{a}{8}$, è anche $<\sqrt{\frac{3aa}{2}}-a$, quindi fatta $x$ non maggiore di $\frac{a}{8}$, l'ordinata ſarà reale. Preſo il ſegno negativo del ſecondo radicale, dovrà eſſere

$\sqrt{\frac{aa-2xx-4ax-a\sqrt{aa-8ax}}{4}}>0$, cioè quadrando, e

Aaa traſ-

trasponendo, $aa - 2xx - 4ax > a\sqrt{aa - 8ax}$, e di nuovo quadrando, e riducendo, $x + 2a > a$, ma $x + 2a$ è sempre maggiore di $a$, adunque purchè prendasi $x$ non maggiore di $\frac{a}{8}$, le ordinate saranno sempre reali. Prendo $x = \frac{a}{8}$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{15aa}}{8}$, e però fatta $KM$ positiva, e $KN$ negativa $= \frac{\sqrt{15aa}}{8}$, i punti $M$, $N$ saranno in curva. Prendo $x = \frac{a}{1}$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{95aa \pm 128a\sqrt{\frac{aa}{2}}}}{16}$, cioè quattro valori reali: due positivi relativamente eguali ai due negativi. E perchè la quarta proporzionale di $\frac{a}{8}$, di $\frac{\sqrt{15aa}}{8}$, e di $\frac{a}{16}$, cioè $\frac{\sqrt{15aa}}{16}$ è minore di $\frac{\sqrt{95aa + 128a\sqrt{\frac{aa}{2}}}}{16}$, ma è maggiore di $\frac{\sqrt{95aa - 128a\sqrt{\frac{aa}{2}}}}{16}$; la curva avrà due rami al di sopra di $AK$, uno concavo, e l'altro convesso, e due ne avrà al di sotto affatto simili, ed eguali a quelli di sopra, e sarà a un di presso come nella *Fig.* 130.

ESEM-

## ESEMPIO V.

Sia la curva dell'equazione

$y = \pm \sqrt{\frac{bbx - x^3 + 2axx - aax}{x - 2a}}$ ; in cui sia, per un caso, $a$ maggiore di $b$, e si prendano dal punto $A$ sulla indefinita $AM$ le $x$, e sulla $AD$ nel dato angolo le $y$, o sia ad essa parallele. ( *Fig.* 131.) Fatta $x = 0$, sarà $y = 0$, e però il punto $A$ sarà in curva. Fatta $y = 0$, sarà $\sqrt{\frac{bbx - x^3 + 2axx - aax}{x - 2a}} = 0$, cioè $bbx - x^3 + 2axx - aax = 0$, e dividendo per $x$, $bb - xx + 2ax - aa = 0$, e però $xx - 2ax + aa = bb$, e cavando la radice, $x - a = \pm b$; adunque i valori della $x$ saranno $x = a + b$, $x = a - b$, ed $x = 0$, essendo stata divisa l'equazione per $x$. Quindi fatta $AB = BM = a$, $BN = BC = b$, la curva taglierà l'asse nel punto $A$, come già si è veduto, e ne' punti $N$, $C$. Fatta $x = AM = 2a$, sarà $y$ positiva, e negativa infinita, e però in $M$ vi sarà un'asintoto. Pongo $x = \infty$, sarà $y = \pm \sqrt{-xx}$, cioè immaginaria, dunque la curva non va all'infinito. Poichè acciò sia reale l'ordinata $y$, fa d'uopo, che la quantità sotto il vincolo sia positiva, converrà ch' essendo positivo il numeratore della frazione, lo sia pure il denominatore,

 ed

ed essendo l'uno negativo, lo sia l'altro ancora; ma acciò sia positivo il numeratore, deve essere $bbx - x^3 + 2axx - aax > 0$, cioè, dividendo per $x$, e trasponendo, $xx - 2ax < bb - aa$, e però $xx - 2ax + aa < bb$, e cavando la radice, $x - a < b$, presa $x$ maggiore di $a$; ed $a - x < b$, presa $x$ minore di $a$. Dalla prima radice $x - a < b$ cavo $x < a + b$; dalla seconda $a - x < b$ cavo $x < a - b$; presa adunque $x$ maggiore di $a$ dovrà essere $x < a + b$, e presa $x$ minore di $a$, dovrà essere $x > a - b$, acciò sia positivo il numeratore; ma perchè sia positivo il denominatore, deve essere $x > 2a$, e non potendo essere maggiore di $2a$, ed assieme minore di $a + b$, e di $a$, non potranno essere positivi il numeratore, e denominatore; e però tra i punti $N$, e $C$ non vi saranno ordinate reali. Se si prenda $x > a + b$, sarà il numeratore negativo, come pure se si prenda $x < a - b$; e se si prenda $x < 2a$, sarà pure negativo il denominatore; adunque tra $A$, ed $N$, e tra $C$, ed $M$ vi saranno ordinate reali, e la curva sarà a un di presso, come nella *Fig.* 131.

Prendo la $x$ negativa, mutando adunque i segni a' termini della $x$ ad esponente dispari, sarà l'equazione

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3 - bbx + 2axx + aax}{-2a - x}},$$ cioè

$$y = \pm \sqrt{\frac{bbx - x^3 - 2axx - aax}{2a + x}}.$$ Il denominatore sarà

sempre

ſempre poſitivo, ma acciò ſia poſitivo il numeratore, converrà, che ſia $bbx - x^3 - 2axx - aax > 0$, e dividendo per $x$, e traſponendo, $xx + 2ax + aa < bb$, cioè $x + a < b$, e però $x < b - a$; ma ſi è ſuppoſto $b < a$, adunque $b - a$ ſarà quantità negativa, e però non potrà mai eſſere $x < b - a$, cioè non potrà mai eſſere poſitivo il numeratore, quindi le ordinate $y$ ſaranno ſempre immaginarie, onde dalla parte delle aſſiſſe negative non vi ſarà curva.

## ESEMPIO VI.

Sia l' equazione $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = axy$, cioè $x = \frac{y^3 - 2ayy - aay + 2a^3}{ay}$. Dal punto fiſſo $A$ (*Fig.* 132.) ſulla indefinita $AQ$ prendo le $y$, e ſulla indefinita $AM$, o ad eſſa parallele nel dato angolo delle coordinate, prendo le $x$. Poſta $y = 0$, ſarà $x = \frac{2aa}{0}$, cioè $x = \infty$, adunque la curva anderà all'aſintoto $AM$. Per vedere, ſe la curva taglia l'aſſe, e dove, pongo $x = 0$, e però $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3 = 0$, e riſolvendo queſt' equazione cubica ſi ânno tre valori della $y$, cioè $y = a$, $y = 2a$, $y = -a$. Fatta adunque $AB = AD = BC = a$, ne' punti $B$, $C$ dalla parte de' poſitivi, e nel punto $D$ dalla parte de' negativi la curva taglierà l'aſſe.

234.

233. Se l'equazione $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ fosse irriducibile, onde non si potessero avere i valori aritmetici della $y$, s'avrebbe a costruire essa equazione, ed i valori della $y$ geometricamente ritrovati, e colle linee espressi, ci darebbero i punti ricercati, il che s'intenda detto di qualunque caso simile. Pongo $y = \frac{3a}{2}$, e sarà $x = -\frac{5a}{12}$, cioè ordinata negativa, adunque la curva passa al di sotto dell'asse $AQ$ in $B$, e torna al di sopra in $C$. Pongo $y = \infty$, sarà $x = \frac{yy}{a}$, cioè $x = \infty$, e però la curva anderà all'infinito. E' chiaro, che il ramo infinito $BE$ sarà convesso all'asse $AM$, il ramo $BC$ concavo all'asse $AQ$, e $CF$ convesso, quando la curva non abbia flessi contrarj.

Si prendano ora le assisse $y$ negative da $A$ verso $D$, sarà adunque l'equazione $x = \frac{-y^3 - 2ayy + aay + 2a^3}{-ay}$, cioè $x = \frac{y^3 + 2ayy - aay - 2a^3}{ay}$. Prendo $y = 0$, sarà $x = -\frac{2aa}{0} = -\infty$, adunque $MA$ infinitamente prodotta dalla parte dei negativi sarà pure asintoto della curva. Prendo $y = \frac{1}{2}a$, sarà $x = -\frac{15a}{4}$; prendo $y = a$, sarà $x = 0$, e la curva passerà per $D$; prendo $y = \infty$, sarà $x = \frac{yy}{a} = \infty$, e la cur-

curva al di ſopra di $AD$ anderà all' infinito; prendo $y = 3a = AK$, ſarà $x = \frac{40a}{3} = KP$; prendo $y = 2a = AN$, ſarà $x = 6a = NR$; quindi perchè condotta la retta $DP$, ſarà $NT = \frac{40a}{6}$, e $\frac{40a}{6} > 6a$, adunque ſarà $NT > NR$, e la curva in $R$ conveſſa all' aſſe $AK$, cioè concava all' aſſe $AM$; ma ſe eſſa va all' aſintoto $AV$ al di ſotto di $AK$, neceſſariamente deve anche eſſere ad eſſo conveſſa, adunque avrà un fleſſo contrario, per determinare il quale non è queſto il luogo.

234. Ma ſe la propoſta equazione della curva da coſtruirſi conterrà ambe le incognite elevate a maggiore poteſtà della ſeconda, onde non poſſa generalmente ridurſi tale, che da una parte del ſegno d'egualità abbia una delle due incognite ſola, e di una ſola poteſtà, allora creſcerà bensì l'operazione, ma non la difficoltà del metodo, imperciocchè fiſſato un valore noto per l'una delle incognite, per eſempio $x$, ſi avrà un' equazione ſolida data per $y$, e le coſtanti, da riſolverſi o coſtruirſi, da cui ſi averanno i valori della $y$, che determineranno tanti punti in curva.

Indi fiſſato un' altro valore per la $x$, averaſſi un' altra equazione ſolida da riſolverſi o coſtruirſi, che ci ſomminiſtrerà altri punti in curva; e così di mano in mano ſucceſſivamente operando, ſi troveranno quanti

punti

punti si vogliono della curva da descriversi.

235. Ma dovendosi in questi incontri, ed in altri ancora, come nell'esempio sesto, risolvere e costruire equazioni solide, pare, che si faccia un circolo vizioso, poichè trattando de' problemi solidi ô supposta la descrizione delle curve anche superiori alle sezioni coniche; ma la cosa non è così, se bene si riflette, imperciocchè se la curva da descriversi è della terza, o quarta dimensione, della terza o quarta al più sarà l'equazione solida da costruirsi, il che si fa per mezzo delle sezioni coniche; adunque senza circolo vizioso descriverassi qualunque curva della terza, o quarta dimensione. Se l'equazione della curva da descriversi sarà della quinta dimensione, l'equazione solida da costruirsi sarà al più della quinta, il che si farà per mezzo d'una curva della terza, e di una della seconda, e similmente si discorra di dimensioni superiori; dal che apparisce, non esservi ombra di circolo vizioso.

## PROBLEMA I.

236. *Dato il semicircolo* AEB, (Fig. 133.) *si dimanda il luogo de' punti* M *tali, che se per ciascuno di essi si tiri dall'estremità* A *del diametro una retta, che taglierà la periferia in* D, *e si abbassino le* MP, DO *perpendicolari al diametro, le intercette dal centro* CP, CO *sieno sempre eguali tra loro.* Sia

Sia $M$ uno dei punti, che si cercano, e si chiami $AB=a$, $AP=x$, $PM=y$, e poichè deve essere $CP=CO$, sarà $OB=AP=x$, ed $OD=\sqrt{ax-xx}$, e per la similitudine de' triangoli $APM$, $AOD$, sarà $x, y :: a-x, \sqrt{ax-xx}$, e però $y=\frac{x\sqrt{ax-xx}}{a-x}$, cioè $y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$, o pure $y=\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$, equazione della curva da descriversi, che è la *Cissoide di Diocle*.

Per descriverla sulla data Figura per varj punti: si osservi, che la retta $AB$ è l'asse delle $x$, ed $A$ il punto, da cui ânno origine, e perchè le $y$ sono perpendicolari a questo asse, condotta dal punto $A$ la tangente $AQ$; sarà essa l'asse, a cui le ordinate $y$ debbono riferirsi. Queste cose premesse, si ponga in primo luogo $x=0$ per vedere se la curva taglia l'asse $AQ$, e perchè si ritrova pure $y=0$, sarà $A$ un punto nella curva da descriversi. Si ponga $y=0$ per vedere se la curva taglia l'asse $AB$ in qualche altro punto, ma poichè si trova $x=0$, non incontrerà la curva i due assi in altro punto, fuorchè in $A$.

Sia $x=\frac{1}{3}a$, sarà $y=\frac{a}{3\sqrt{2}}$; sia $x=\frac{1}{2}a$, sarà $y=\frac{1}{2}a$, e però eretta dal centro la perpendicolare $CE$ al diametro $AB$, passerà la curva per lo punto $E$.

Sia $x = \frac{2a}{3}$, sarà $y = \frac{4a}{3\sqrt{2}}$, e posta finalmente $x = a$, si trova $y = \frac{aa}{0} = \infty$, e perciò la tangente $BR$ al circolo sarà l'asintoto della curva. Prendo $x$ maggiore di $a$, sarà negativa la quantità sotto il segno radicale nel denominatore, e la curva immaginaria, la quale essendo pure immaginaria, presa la $x$ negativa, sarà compresa fra le due tangenti $AQ$, $BR$ prodotte in infinito. E poichè va all'asintoto $BR$, non avendo flessi contrarj, converrà, che sia tutta convessa all'asse $AB$, e sarà, come nella *Fig.* 133.

## PROBLEMA II.

237. *Dato l'angolo retto* ABC, (Fig. 134.) *e dato il punto* A *nel lato* AB, *si cerca il luogo di tutti i punti* M *tali, che condotte per ciascuno di essi le rette linee* AE, *terminate dal lato* BC *nei punti* E, *sia sempre* EM = EB.

Si tiri una qualunque retta $AE$, e sia $M$ uno dei punti, che si cercano; si abbassi dal punto $M$ ad $AB$ la perpendicolare $MP$, e si chiami $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, sarà $PB = a - x$, ed $AM = \sqrt{xx + yy}$, ma per i triangoli simili $APM$, $ABE$, sarà $x, y :: a, BE$, dunque $BE = EM = \frac{ay}{x}$, ma è anche $AP, PB :: AM, ME$,

cioè

cioè $x, a-x :: \sqrt{xx+yy}, \frac{ay}{x}$, dunque $ay = \overline{a-x}\sqrt{xx+yy}$, e quadrando, $aayy = aaxx - 2ax^3 + x^4 + aayy - 2axyy + xxyy$, cioè $\frac{aaxx - 2ax^3 + x^4}{2ax - xx} = yy$, e finalmente, essendo la radice di $aaxx - 2ax^3 + x^4$ tanto $ax - xx$, quanto $xx - ax$, sarà $y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, ed $y = \frac{xx - ax}{\sqrt{2ax - xx}}$, cioè $\pm y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, equazione alla curva, che si cerca.

Le ordinate $y$ saranno adunque positive, e negative, ed eguali fra loro, e le positive e le negative corrisponderanno alla medesima assissa, e però la curva sarà al di sopra, ed al di sotto dell'asse $AB$ in tutto simile, ed eguale.

Condotta dal punto $A$ la perpendicolare $AR$ alla $AB$, la quale sarà l'asse, a cui si rapportano le ordinate $y$, siccome $AB$ è quello delle assisse $x$; pongo in primo luogo $x = 0$ per vedere se la curva passa per lo punto $A$, e perchè trovo parimenti $y = 0$, sarà il punto $A$ il vertice della curva. Sia ora $y = 0$, sarà $ax - xx = 0$, e però $x = 0$, ed $x = a$, onde ricavo, che la curva passerà per lo punto $B$. Sia $x = \frac{1}{3}a$, sarà $\pm y = \frac{2a}{3\sqrt{5}}$. Sia $x = \frac{1}{2}a$, sarà $\pm y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Sia $x = \frac{4a}{3}$, sarà $\pm y = \frac{4a}{3\sqrt{8}}$. Sia $x = 2a$, sarà $\pm y = \frac{2aa}{0} = \infty$, e perciò,

 presa

presa $AD = 2a$, e condotta la retta $SQ$ indefinita parallela alla $PM$, sarà essa l'asintoto della curva. Sia $x$ maggiore di $2a$, sarà negativa la quantità sotto il vincolo radicale, e però immaginaria l'ordinata $y$, adunque oltre il punto $D$ non vi sarà più curva. E' chiaro, che la curva tra il punto $A$, ed il punto $B$ sarà concava all'asse $AB$, e poichè oltre al punto $B$ va all' asintoto $SQ$, sarà tra $B$, e $D$ convessa all' asse $BD$; intendendo però, che non abbia flessi contrarj.

Presa la $x$ negativa, sarà sempre negativa la quantità sotto il vincolo radicale, e però immaginaria l'ordinata $y$; adunque dalla parte delle assisse negative non vi sarà curva, quindi sarà essa a un di presso, come nella *Fig.* 134.

## PROBLEMA III.

238. *Dato il semicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC; *si ricerca fuori di esso il punto* M *tale*, *che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *sia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti sono i punti* M, *che soddisfanno al problema*, *se ne dimanda il luogo*.

Sia $M$ uno di questi punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, sarà, per la proprietà del circolo,

lo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, sarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax - xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o sia $y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da descriversi, che dicesi la *Versiera*.

Poichè $AB = x$, $BM = y$, sarà $AC$ l'asse delle $x$, ed $AQ$, parallela alla $BM$, l'asse delle ordinate $y$. Si ponga primieramente $x = 0$, sarà $y = \infty$, e però $AQ$ l'asintoto della curva. Sia $y = 0$, sarà $a\sqrt{a - x} = 0$, e però $x = a$; quando adunque sia $x = a$, la curva taglierà l'asse $AC$, e passerà per conseguenza per lo punto $C$, che ne sarà il vertice. Sia $x = AR = \frac{a}{2}$, sarà $y = a$; sia $x = AP = \frac{3a}{4}$, sarà $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; sia $x = AF = \frac{4a}{5}$, sarà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$. Posta $x$ maggiore di $a$, la quantità sotto il segno radicale sarà negativa, e la curva immaginaria. Per vedere se la curva sia concava, o convessa all' asse $AC$, si faccia la proporzione: come $CP = \frac{a}{4}$ (che corrisponde alla $x = \frac{3a}{4}$) alla $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, così $CF = \frac{1}{5}a$ (che corrisponde alla $x = \frac{4a}{5}$) al quarto, che sarà $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$; ma la $x = \frac{4a}{5}$ ci dà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, e $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$ è minore di $a\sqrt{\frac{1}{4}}$, adunque sarà la curva concava all' asse $AC$; ma per l'asin-

l'asintoto $AQ$ deve anche essere convessa, adunque sarà in parte concava, ed in parte convessa, e però avrà un flesso contrario, il quale si troverà col metodo da darsi a suo luogo; e perchè, presa la $x$ negativa, è negativa la quantità sotto il vincolo radicale del denominatore, cioè immaginaria la $y$, perciò la curva sarà, come si vede nella *Fig.* 135. avvertendo, che essa curva â un ramo simile, ed eguale al ramo $CLM$, dalla parte delle $y$ negative.

## PROBLEMA IV.

139. *Data la retta indefinita* NN, (Fig. 136.) *e dato un punto* P *fuori della medesima, si domanda il punto* M *tale, che condotta da esso al punto* P *la retta* MP, *sia la intercetta fra la linea indefinita* NN, *ed il punto* M, *eguale ad una data linea, e perchè infiniti sono i punti, che soddisfanno, si cerca il luogo di essi punti.*

Si tiri dal punto $P$ la retta $PA$ perpendicolare alla $NN$, e la retta $PM$ ad un qualunque punto $M$, che si supponga essere uno di quelli, che si cercano, e condotta la retta $ME$ parallela alla $NN$, si chiami $PS=b$, $SE=x$, $EM=y$, e sia $SA=a$ la data linea, a cui deve essere eguale la retta $NM$, per la condizione del problema. Si tiri dal punto $N$ la retta $NO$ perpendicolare alla

alla $EM$, farà $MO = \sqrt{aa - xx}$, e per i triangoli simili $PEM$, $NOM$; $PE$, $EM$ :: $NO$, $OM$, cioè $b + x$, $y :: x$, $\sqrt{aa - xx}$, e però $\overline{b + x}\sqrt{aa - xx} = xy$, e quadrando, $xxyy = aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx$, e finalmente

$$y = \pm \frac{\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx}}{x}$$, equazione alla curva da descriversi, che è la *Concoide di Nicomede*.

Tre diversi casi possono distinguersi in questo problema; cioè può essere $b = a$; può essere $b$ minore di $a$; e finalmente $b$ maggiore di $a$. Sia in primo luogo $b = a$, si muterà l'equazione nella seguente

$$y = \pm \frac{\sqrt{-x^4 + 2a^3x - 2ax^3 + a^4}}{x}.$$

Poichè $SE = x$, $EM = y$, farà $NN$ l'asse, a cui si riferiscono le $y$, e $PA$ quello delle $x$, delle quali $S$ è l'origine. Pongo in primo luogo $x = 0$, per vedere se la curva passa per lo punto $S$, e perchè ne viene $y = \pm \frac{aa}{0}$, cioè $y$ infinita positiva, e negativa, farà $NN$ l'asintoto della curva; pongo $y = 0$ per vedere dove la curva taglia l'asse $PA$, e farà $-x^4 + 2a^3x - 2ax^3 + a^4 = 0$, onde risoluta colle regole già insegnate quest'equazione, le radici di essa ci determineranno i

punti

punti, ne' quali la curva incontra il detto asse $PA$; ma quattro sono le radici di quest' equazione, cioè $x=a$ positiva, e tre eguali negative $x=-a$, dunque la curva incontrerà l'asse in due punti lontani dal punto $S$ la quantità $a$, ma perchè non si tratta per ora, che delle $x$ positive, basterà considerare il valore positivo, e però la curva passerà per lo punto $A$, essendo, come si è supposto, $SA=a$. Sia $x=\frac{1}{2}a$, sarà $y=\pm\sqrt{\frac{27aa}{2}}$. Sia $x=\frac{2a}{3}$, sarà $y=\pm\sqrt{\frac{125aa}{6}}$. Sia $x$ maggiore di $a$, sarà negativa la quantità sotto il vincolo radicale, essendo in quest' ipotesi il primo termine maggiore del quarto, ed il terzo maggiore del secondo, onde presa la $x$ maggiore di $a$, sarà la curva immaginaria. Resta da vedersi se sia sempre essa curva convessa all'asse $PA$, giacchè in parte deve esserlo per cagione dell'asintoto $NN$. Si faccia adunque la proporzione: come $AE=\frac{1}{2}a$ (la quale corrisponde alla $x=\frac{1}{2}a$) alla $y=\sqrt{\frac{27aa}{2}}$, così $AI=\frac{1}{3}a$ al quarto, che sarà $\sqrt{\frac{27aa}{3}}$, ma $AI=\frac{1}{3}a$ corrisponde alla $x=\frac{2a}{3}$, e perciò alla $y=\sqrt{\frac{125aa}{6}}$, e la $\sqrt{\frac{125aa}{6}}$ è maggiore di $\sqrt{\frac{27aa}{3}}$, dunque la curva sarà in parte concava all' asse $PA$, ed in

in conseguenza avrà un flesso contrario, come si vedrà a suo luogo. E perchè al medesimo valore della $x$ corrispondono due valori eguali della $y$, l'uno positivo, l'altro negativo, avrà la curva un'altro ramo dalla parte delle $y$ negative simile, ed eguale a quello dalla parte delle positive, e sarà, come si vede descritta nella *Fig.* 136.

Per descrivere la curva dalla parte delle $x$ negative, converrà cambiare i segni de' termini, ne' quali la incognita è elevata a potestà dispari, onde sarà l'equazione $y = \pm \frac{\sqrt{-x^4 - 2a^3x + 2ax^3 + a^4}}{-x}$. Sia in primo luogo adunque $x = 0$, sarà $y = \pm \frac{aa}{0}$, e perciò $NN$ l'asintoto della curva anche dalla parte dei negativi. Sia $y = 0$, sarà $-x^4 - 2a^3x + 2ax^3 + a^4 = 0$, da cui si ricavano, come sopra, quattro radici; tre eguali positive $x = a$, ed una negativa $x = -a$. La radice negativa, che era positiva nel caso anteriore, si è già fissata nella concoide superiore; i tre valori eguali poi significano, che nel polo, distante appunto la quantità $a$ dall'origine delle $x$, avrà la curva un regresso, di cui si tratterà nel metodo dei flessi contrarj. Sia $x = \frac{1}{2}a$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{3aa}}{2}$; sia $x = \frac{2a}{3}$, sarà $y = \pm \frac{\sqrt{5aa}}{6}$. Si prenda $x$ maggiore di $a$, sarà la curva immaginaria,

perchè essendo la quantità sotto il vincolo radicale il prodotto di $xx - 2ax + aa$, quantità sempre positiva, in $aa - xx$, che in questa ipotesi è negativa, sarà negativa tutta la quantità sotto il segno radicale, e però immaginaria la ordinata $y$. Si faccia ora la proporzione: come $PR = \frac{1}{2}a$ (fatta $SR = \frac{1}{2}a$) alla $\frac{\sqrt{3aa}}{2}$, così $PQ = \frac{1}{3}a$ (fatta $SQ = \frac{2a}{3}$) al quarto, che sarà $\frac{\sqrt{3aa}}{3}$, ma alla $SQ = \frac{2a}{3}$, cioè alla $PQ = \frac{a}{3}$ corrisponde la $y = \frac{\sqrt{5aa}}{6}$, e $\frac{\sqrt{5aa}}{6}$ è minore di $\frac{\sqrt{3aa}}{3}$, adunque sarà sempre convessa la curva all'asse $NN$, (supposto, che non abbia flessi contrarj) ed avrà due rami simili, ed eguali fra loro, corrispondendo alla stessa $x$ due valori eguali della $y$, l'uno positivo, l'altro negativo, e però sarà, come si vede descritta inferiormente nella *Fig.* 136.

240. Sia ora $b$ minore di $a$, l'equazione è adunque

$$y = \pm \frac{\sqrt{aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx}}{x}.$$

Pongo $x = 0$, sarà $y = \pm \frac{ab}{0} = \pm \infty$, e però $NN$ (*Fig.* 137.) anche in questo caso l'asintoto della curva; sia $y = 0$, sarà $aaxx - x^4 + 2aabx - 2bx^3 + aabb - bbxx = 0$,

le

le di cui quattro radici ( cioè $x=\pm a$, e due tra loro eguali $x=-b$ ) determineranno i punti, ne' quali la curva taglia l'asse $PA$; ma per ora basterà considerare il valore positivo $x=a$, e perchè $SA=a$, sarà $A$ il vertice della curva. Pongo $x=\frac{1}{2}a=SE$, sarà $y=\pm\frac{\sqrt{3aa+12ab+12bb}}{2}=EM$. Pongo $x=\frac{2a}{3}=SI$, sarà $y=\pm\frac{\sqrt{20aa+60ab+45bb}}{6}=IK$. Faccio la proporzione: $AE\ (\frac{1}{2}a)$, $EM\ (\frac{\sqrt{3aa+12ab+12bb}}{2})::AI\ (\frac{1}{3}a)$ al quarto $IV$, che sarà $\frac{\sqrt{3aa+12ab+12bb}}{3}$, per vedere se la curva è concava, o convessa all'asse $SA$; ma presa $AI=\frac{1}{3}a$, si â $SI=\frac{2a}{3}$, a cui corrisponde $IK=y=\frac{\sqrt{20aa+60ab+45bb}}{6}$, e si trova essere $IV\ (\frac{\sqrt{3aa+12ab+12bb}}{3})$ minore di $IK\ (\frac{\sqrt{20aa+60ab+45bb}}{6})$, dunque sarà la curva concava all'asse $SA$; ma poichè va all'asintoto $NN$, sarà pure convessa, e però avrà un flesso contrario.

E' chiaro, che presa l'assissa oltre il punto $A$, cioè la $x$ maggiore di $a$, non vi sarà curva, poichè il se-

condo termine del radicale ſarebbe maggiore del primo, il quarto maggiore del terzo, il ſeſto maggiore del quinto, e però negativa la quantità ſotto il vincolo, cioè immaginaria la $y$.

E perchè alla ſteſſa aſſiſſa $x$ corriſpondono due ordinate $y$ eguali, una poſitiva l'altra negativa, ſarà la curva la ſteſſa anche dalla parte delle ordinate negative, ed a un di preſſo, come nella *Fig.* 137.

Per deſcrivere la curva dalla parte delle aſſiſſe $x$ negative, muto il ſegno nell'equazione ai termini, ne' quali la $x$ è a poteſtà diſpari, ed è

$$y = \pm \frac{\sqrt{aaxx - x^4 - 2aabx + 2bx^3 + aabb - bbxx}}{-x}.$$

Pongo $x = 0$, e trovo $y = \pm \frac{ab}{0}$, cioè infinita, e però $NN$ ſarà pure l'aſintoto. Pongo $y = 0$, e ſarà $aaxx - x^4 - 2aabx + 2bx^3 + aabb - bbxx = 0$; le quattro radici di queſt'equazione, che ſono, due $x = \pm a$, e due eguali $x = b$, determinano i punti, dove la curva taglia l'aſſe $AP$. La negativa $x = -a$ mi dà il punto $A$, la poſitiva $x = a$ il punto $m$, e le due eguali $x = b$ il punto $P$, che ſarà un nodo della curva; preſa $PR = SR = \frac{1}{2}b = x$, ſarà $y = \pm \frac{\sqrt{4aa - bb}}{2} = RT$; preſa $PQ = \frac{1}{3}b$; cioè $SQ = x = \frac{2}{3}b$, ſarà $y = \pm \frac{\sqrt{9aa - 4bb}}{6} = QH$. Faccio

l'ana-

l'analogia $PR\ (\frac{1}{2}b)$, $RT\ (\frac{\sqrt{4aa-bb}}{2})$ :: $PQ\ (\frac{1}{3}b)$, $QO\ (\frac{\sqrt{4aa-bb}}{3})$, per vedere se la curva è concava, o convessa all'asse $PS$, ma $QO\ (\frac{\sqrt{4aa-bb}}{3})$ è maggiore di $QH\ (\frac{\sqrt{9aa-4bb}}{6})$, adunque la curva è convessa all'asse $PS$, e seguita ad esserlo, andando all'assintoto $NN$.

Presa l'assissa oltre il punto $m$, cioè $x$ maggiore di $a$, non vi sarà curva, perchè il radicale $\sqrt{aaxx - x^4 - 2aabx + 2bx^3 + aabb - bbxx}$ è lo stesso, che $\sqrt{aa - xx \times xx - 2bx + bb}$, ma posta $x$ maggiore di $a$, sarà $aa - xx$ quantità negativa, ed $xx - 2bx + bb$ è quantità positiva, adunque negativo il prodotto, e però immaginaria la ordinata $y$. Presa l'assissa oltre il punto $P$, cioè $x$ maggiore di $b$, ma però minore di $a$, sarà $aa - xx$, come pure $xx - 2bx + bb$, quantità positiva, e però positivo il prodotto, e reale la ordinata $y$, adunque tra $P$, ed $m$ corrisponderà pure la curva, e sarà essa la foglia $Pxmy$ col nodo in $P$, e la curva sarà a un di presso, come nella *Fig.* 137.

241. Sia finalmente $b$ maggiore di $a$, l'equazione è la stessa del caso anteriore, e prese le assisse $x$ positive,

tive, è pure simile la curva, prese poi le $x$ negative, e supposta $y=0$, le quattro radici dell'equazione, cioè $x=\pm a$, e le due eguali $x=b$ danno bensì i medesimi punti $A$, $m$, $P$ nell'asse $PA$; ma il punto $m$ è al di sopra del punto $P$, ed assunta l'assissa maggiore di $Sm$, cioè $x$ maggiore di $a$, sarà $aa-xx$ quantità negativa, e perchè è $xx-2bx+bb$ quantità positiva, sarà negativo il prodotto, e però immaginaria l'ordinata $y$, adunque la curva non avrà la foglia dell'anteriore, ma avrà in $m$ il vertice. E poichè la curva è prima concava, e poi convessa all'asse $PS$, come facilmente si può vedere, e va all'asintoto $NN$, sarà a un di presso, come nella *Fig.* 138.

242. Questo metodo di descrivere le curve per infiniti punti può forse ridursi a maggior perfezione col servirsi anche di costruzioni geometriche. Ne darò alcuni esempj, i quali basteranno a mettere la cosa in chiaro.

## ESEMPIO I.

Vogliasi costruire per varj punti la curva del Problema I. num. 236., che è la Cissoide di Diocle, la di cui equazione si è trovata essere $y=\frac{xx}{\sqrt{ax-xx}}$.

Col

Col raggio $AC = \frac{1}{2}a$ ( *Fig.* 133. ) deſcritto il circolo $AEBe$, e preſa ad arbitrio $AP = x$, oſſervo, che la corriſpondente ordinata $Pf$ è $= \sqrt{ax - xx}$; per lo punto $f$ tiro il diametro $fCD$, e congiunti i punti $A$, $D$ colla linea $AD$, il punto $M$, in cui eſſa taglia l'ordinata ſuperiore $PF$ continuata, ſe fa biſogno, ſarà alla Ciſſoide. Imperciocchè eſſendo retto l'angolo nel ſemicircolo $fAD$, ſiccome pure l'angolo $APM$ delle coordinate, ſaranno ſimili i triangoli $AfP$, $APM$, e però ſarà l'analogìa $fP$, $AP$ :: $AP$, $PM$, cioè $\sqrt{ax - xx}$, $x$ :: $x$, $y$, onde ſarà $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$, il che ec.

In altra maniera: poichè ſono ſimili i triangoli $PCf$, $CDO$, per eſſer retti gl'angoli $P$, $O$, ed eguali gl'angoli al vertice $PCf$, $DCO$; ed in oltre $Cf = CD$, ſarà anco $CP = CO$, proprietà della curva.

## ESEMPIO II.

Sia la curva del Problema II. num. 237, la di cui equazione è $\pm y = \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Col raggio $AB = a$ ( *Fig.* 134. ) ſi deſcriva il circolo $AFD$, preſa una qualunque $AP = x$, ſi tiri dal punto $P$ l'ordinata $PF = \sqrt{2ax - xx}$, e condotto il raggio $BF$, ſi tiri $AHE$

ad

ad esso normale, taglierà questa l'ordinata $PF$ continuata, se bisogna, nel punto $M$, che sarà alla curva $AMB$, che si cerca. Imperocchè essendo simili i due triangoli $AMP$, $FMH$, ed in oltre simili i triangoli $FMH$, $FBP$, sarà il triangolo $AMP$ simile al triangolo $BFP$, e però si avrà $PF, PB :: AP, PM$, cioè $\sqrt{2ax-xx}, a-x :: x, y$, onde si ricava l'equazione proposta $\frac{ax-xx}{\sqrt{2ax-xx}}=y$, il che ec.

In altra maniera: poichè il triangolo $AMP$ è simile al triangolo $AHB$, e si è veduto di sopra, che il triangolo $AMP$ è simile pure al triangolo $FPB$, sarà il triangolo $AHB$ simile al triangolo $FPB$, ma il lato $AB=BF$, dunque sarà anche $BH=BP$; si tiri la retta $MI$ parallela ad $AB$, saranno simili i triangoli $BHE$, $MIE$, ma saranno anche fra loro equilateri, essendo $BH=BP=MI$, dunque sarà $EB=EM$, che è la proprietà fundamentale della curva proposta.

## ESEMPIO III.

Sia da descriversi la Versiera del Problema III. num. 238., la di cui equazione è $y=\frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$. Essendo il diametro del circolo $AC=a$, e presa ad arbitrio

trio una qualunque $AB=x$, ( *Fig.* 135. ) si tirino le indefinite $BM$, $CE$ perpendicolari ad $AC$, indi per lo punto $D$, in cui la $BM$ taglia il circolo, si tiri $AD$, che prodotta taglierà $CE$ in $E$, dal punto $E$ si abbassi una parallela ad $AC$, incontrerà essa la $BM$ nel punto $M$, che appartiene alla curva. In fatti, per la proprietà del circolo, $BD=\sqrt{ax-xx}$, e, per i triangoli simili $ABD$, $ACE$, è $AB$, $BD$ :: $AC$, $CE$, cioè $x$, $\sqrt{ax-xx}$ :: $a$, $CE=\frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}=y$, equazione della curva.

## ESEMPIO IV.

Sia da descriversi per varj punti la Concoide di Nicomede del Problema IV. num. 239., la di cui equazione $\pm y=\frac{b\pm x\sqrt{aa-xx}}{\pm x}$; sia $SA=Sa=a$, $SP=b$, col raggio $SA=a$ si descriva il circolo $ABCa$, ( *Fig.* 139. ) e prese ad arbitrio due assisse $SE$, $Se$ tra loro eguali, che si chiamino $x$, positive, e negative, si tirino le ordinate $EB$, $eC$, ciascuna delle quali sarà $=\sqrt{aa-xx}$, e si producano oltre i punti $B$, $C$ indefinitamente, per i punti $S$, $B$ si tiri la retta $SB$, e per lo punto $P$ ad essa si tiri parallela la $PM$; i due punti $M$, $m$, ne' quali la $PM$ taglia le due rette $EB$, $eC$,

apparterranno alla curva, che ſi cerca, vale a dire il punto $M$ al ramo ſuperiore, ed il punto $m$ al ramo inferiore della Concoide.

E quanto al punto $M$: poichè ſono ſimili i due triangoli $SEB$, $PEM$, ſarà $SE$, $EB :: PE$, $EM$, cioè $x$, $\sqrt{aa - xx} :: b + x$, $y$; e conſeguentemente l'equazione $y = \frac{\overline{b + x}\sqrt{aa - xx}}{x}$ ſpettante al ramo ſuperiore della Concoide.

Riguardo poi al punto $m$, condotta la linea $SC$, ſarà il triangolo $SeC$ eguale al triangolo $SEB$, ma il triangolo $Pem$ è ſimile al triangolo $SEB$, dunque ſarà anco ſimile al triangolo $SeC$, e però ſi avrà l'analogìa $Pe$, $em :: Se$, $eC$, cioè $-x, \sqrt{aa - xx} :: b - x$, $y$, onde ſi ricava l'equazione $y = \frac{\overline{b - x}\sqrt{aa - xx}}{-x}$, che è appunto quella, che appartiene al ramo inferiore della curva.

Condotta per lo punto $S$ la indefinita $SN$ parallela alle ordinate $EM$, $em$, facilmente ſi ricava dalla coſtruzione ſuperiore la principale proprietà della Concoide, cioè, che ſe dal polo $P$ ſi condurrà la $PM$, la quale tagli la curva nei punti $M$, $m$, e la $SN$ nel punto $N$, ſaranno le intercette $mN$, $NM$ fra la curva, e la indefinita $SN$ di lunghezza ſempre coſtante, ed

eguali

eguali ad $SA=SB=a$. Imperciocchè per la costruzione sarà $SBMN$ un parallelogrammo, e però $NM=SB$, ma condotta $NO$ parallela ad $Se$, sono simili i triangoli $SBE$, $mNO$, ed in oltre $NO=Se=SE$, dunque sarà $mN=SB$, ed in conseguenza $mN=NM$, il che ec.

243. Le costruzioni dei primi tre Esempj riescono assai semplici, non essendosi in esse adoperati se non che circoli di dato diametro, e rette linee. In altri incontri verranno ad uso le sezioni coniche, descritte anche tal' ora con diametri, parametri, e rettangoli variabili, ma che si prendono come costanti per determinare uno, o più punti della curva.

Per darne un' esempio: vogliasi costruire per punti la curva dell' equazione $x\sqrt{2ax-xx}=yy$ (*Fig.* 140.) Descritto il circolo $AHBh$, il di cui diametro $AB=2a$, prendo ad arbitrio $AD=KB=x$, sarà $DE=KI=\sqrt{2ax-xx}$. Col parametro $DE$, all'asse $AB$ descrivo la parabola apolloniana $GFAfg$, e $DF$, $Df$ daranno i valori positivo, e negativo di $y$, posta $x=AD$; $KG$, $Kg$ i valori positivo, e negativo di $y$, posta $x=AK$. I quattro punti per tanto $F$, $f$, $G$, $g$ saranno nella curva cercata. Con simil metodo, variato il valore della $x$, si determineranno altri punti della nostra curva.

244. La seconda maniera di costruire le curve superiori al secondo grado sarà, come ô detto al num. 220., per

mezzo di altre linee di grado inferiore; e per cominciare dalle parabole di qualunque grado, si osservi primieramente, che la parabola apolloniana è una sola, e si esprime coll'equazione $ax = yy$; le cubiche sono due, cioè $aax = y^3$, $axx = y^3$; quelle del quarto grado sono tre, cioè $a^3x = y^4$, $aaxx = y^4$, $ax^3 = y^4$. Quelle del grado $n$ sono $n - 1$, cioè $ax^{n-1} = y^n$; $aax^{n-2} = y^n$; $a^3x^{n-3} = y^n$; $a^4x^{n-4} = y^n$, e così successivamente sin' a tanto, che l'esponente della $x$ sia l'unità.

245. Tutte quelle, che ânno la $x$ coll'esponente dell'unità, si chiamano parabole prime, onde $aax = y^3$, $a^3x = y^4$, $a^{n-1}x = y^n$ sono tutte parabole prime.

Per costruire qualunque parabola di qualsivoglia grado, si dia principio dalla parabola prima cubica $aax = y^3$.

E' manifesto, che questa averà due rami, uno positivo, negativo l'altro, imperocchè pigliando la $x$ positiva, sarà positiva anche la $y$, cioè $y = \sqrt[3]{aax}$, e questo sarà il ramo positivo. Ma pigliando la $x$ negativa, sarà negativa anche la $y$, cioè $y = \sqrt[3]{-aax}$, (che non è punto quantità immaginaria) e questo sarà il ramo negativo. E' chiaro, che i due rami vanno all'infinito, e sono concavi all'asse $AB$. (*Fig.* 141.)

Per passare alla costruzione: si ponga $yy = az$, e sostituendo nell'equazione $aax = y^3$, in luogo di $yy$, questo

ſto valore $az$, l'equazione alla parabola cubica ſi muterà in queſt'altra $ax = zy$, che ſi riſolve nella ſeguente analogìa $a, z :: y, x$.

Ciò poſto, all'aſſe $AB$ ſi deſcriva la parabola dell'equazione $yy = az$, e ſia $DAE$. Sia $AB = z$, $BE = y$, $BD = -y$, $AC = a$, e ſi conduca $CB$, e per lo punto $A$ la linea $KAF$ parallela alla $CB$, e fatta $AG = BE$, ſi tiri $GE$, ſarà $CA, AB :: AG, GF$, cioè $a, z :: y, x$, onde preſa ad arbitrio la $AB$, le corriſpondenti $BE$, o ſia $AG$, e $GF$ ſaranno le coordinate della noſtra parabola cubica, ed $F$ ne ſarà un punto; imperocchè reſtituendo nell'analogìa $a, z :: y, x$ il valore di $z$, cioè $\frac{yy}{a}$, ſarà $a, \frac{yy}{a} :: y, x$, che appunto ci dà l'equazione $y^3 = aax$.

Ma perchè, quando ſi prenda $x$ negativa, anche $y$ è negativa, l'analogìa $a, z :: y, x$ ſi muterà nella ſeguente $a, z :: -y, -x$; onde preſa $AV = BD$, ſarà $CA, AB :: AV, VK$, cioè $a, z :: -y, -x$, ed il punto $K$ ſarà nella parabola cubica. Il ramo $AMF$ ſarà il poſitivo, ed il ramo $ANK$ il negativo.

246. Sia propoſta da coſtruirſi la parabola prima del quarto grado $a^3x = y^4$. Queſta avrà pure due rami, uno ſopra l'aſſe, l'altro al di ſotto, perchè alla $x$ poſitiva corriſponde tanto $y$, quanto $-y$, per eſſere l'indice della poteſtà della $y$ di numero pari. Queſti due rami ſaran-

ranno concavi all'asse, ed anderanno all' infinito. Per passare alla costruzione, faccio $y^3 = aaz$, e sostituendo in luogo di $y^3$ questo valore nell'equazione proposta, si avrà $zy = ax$, o sia $a, z :: y, x$.

All' asse $KC$ (*Fig.* 142.) si descriva la parabola dell'equazione $y^3 = aaz$, che, per essere la prima cubica, già si sa costruire, e sia questa la $QAD$, sarà $AC = GD = z$, $AK = -z$, $CD = AG = y$, $KQ = -y$. Prendasi $AB = a$, e si tirino le rette $BC$, $BK$, e per lo punto $A$ sia $AF$ parallela a $BC$, ed $AP$ parallela a $KB$, ciò posto, sarà $BA, AC :: AG, GF$, cioè $a, z :: y, x$, ed il punto $F$ sarà nella curva proposta da costruirsi; imperocchè essendo $a, z :: y, x$, ed essendo ancora $z = \frac{y^3}{aa}$, sarà $a, \frac{y^3}{aa} :: y, x$, cioè $a^3x = y^4$.

Ma poichè, essendo $x$ positiva, si può prendere la $y$ anche negativa, che in questo caso sarà la $KQ$, e la $AK$ sarà $-z$, avrassi pure $BA, AK :: KQ$ (cioè $AR$), $RP$, o sia $a, -z :: -y, x$, e però il punto $P$ sarà nella curva $a^3x = y^4$.

247. Sia proposta da costruirsi la parabola prima del quinto grado $a^4x = y^5$. Questa ancora avrà due rami, uno positivo, negativo l'altro; imperocchè pigliando $x$ positiva, sarà $y$ positiva, cioè $y = \sqrt[5]{a^4x}$, ma pigliando $x$ negativa, sarà $y$ negativa, cioè $y = \sqrt[5]{-a^4x}$.

Questi

Questi due rami vanno all'infinito, e sono concavi all' asse $AB$. Per passare alla costruzione: faccio $y^4 = a^3 z$, e sostituendo questo valore nell'equazione proposta, sarà $ax = yz$, o sia $a, z :: y, x$.

All'asse $AB$ (*Fig.* 141.) si descriva la parabola dell' equazione $y^4 = a^3 z$, e sia $DAE$. Essendo $AB = z$, sarà $BE = y$, $BD = -y$. Sia $AC = a$, e si conduca $CB$, e ad essa parallela la $KAF$, indi si tiri la retta $EFG$, e la parallela $DVK$. Ciò posto, sarà $CA, AB :: AG, GF$, $(a, z :: y, x)$ ed il punto $F$ sarà nella curva proposta da costruirsi; imperocchè essendo $a, z :: y, x$, ed essendo ancora $a^3 z = y^4$, sarà $a, \frac{y^4}{a^3} :: y, x$, cioè $y^5 = a^4 x$.

Ma perchè essendo $x$ negativa, anche la $y$ sarà negativa, l'analogìa $a, z :: y, x$ si muta nella seguente $a, z :: -y, -x$, onde presa $AV = DB$, sarà $CA$, $AB :: AV, VK$ $(a, z :: -y, -x)$, ed il punto $K$ sarà nella curva proposta da costruirsi. Il ramo $AMF$ sarà il positivo, ed il ramo $ANK$ il negativo.

248. Generalmente sia proposta da costruirsi la parabola $a^{n-1} x = y^n$. Facciasi $y^{n-1} = a^{n-2} z$, e sostituendo questo valore nell'equazione proposta, si avrà sempre $zy = ax$. Onde si scopre, che si potrà sempre costruire qualunque parabola prima per mezzo del triangolo, e della parabola prima del prossimo grado inferiore.

249. Ora sarà facile passare alla costruzione dell'altre para-

parabole ancora, cioè alla costruzione delle seconde, terze, quarte ec. di qualunque grado; anzi queste pure si sono costruite nella costruzione delle prime.

Sia proposta da costruirsi la seconda parabola cubica $axx = y^3$. Pongo $y^3 = aaz$, dunque sostituendo nell' equazione proposta, in luogo di $y^3$, il suo valore $aaz$, sarà $xx = az$.

All'asse $AB$ (*Fig.* 143.) si descriva la parabola apolloniana $AC$ dell'equazione $xx = az$, indi allo stesso asse si descriva la prima parabola cubica dell' equazione $y^3 = aaz$, ed essendo $AB = z$, sarà $BE = y$, ma nella parabola apolloniana $AC$, essendo $AB = z$, sarà $BC = x$, dunque si avranno sempre le due coordinate $x$, $y$ della seconda parabola cubica.

Sia proposta da costruirsi la parabola terza del quarto grado $ax^3 = y^4$. Pongo $a^3 z = y^4$, dunque sostituendo, sarà $x^3 = aaz$. Sia costruita la parabola prima cubica $x^3 = aaz$, ed al medesimo asse si costruisca pure la prima del quarto grado $y^4 = a^3 z$. Le due ordinate di queste curve corrispondenti alla medesima assissa $z$ daranno le coordinate $x$, $y$ dell' equazione proposta $ax^3 = y^4$.

In tutte le altre di qualunque grado superiore si proceda collo stesso metodo, bastando i dati esempj, per essere la cosa da se chiara.

250. Solo rimane da osservarsi, che la parabola seconda del quarto grado $aaxx = y^4$ non è altro, che la

la parabola apolloniana, ma raddoppiata in senso contrario. E primieramente se è $aaxx = y^4$, sarà anche, estraendo la radice quarta, $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt{ax} = \pm y$. Ora $\sqrt{ax} = \pm y$, o sia $ax = yy$, altro non è, che l'equazione alla parabola apolloniana. La nostra curva poi è una parabola apolloniana raddoppiata, poichè il termine $aaxx$ viene egualmente generato tanto da $+\overline{ax} \times \overline{+ax}$, quanto da $\overline{-ax} \times \overline{-ax}$, verificandosi del pari, essere $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt[4]{\overline{+ax} \times \overline{+ax}} = \sqrt[4]{\overline{-ax} \times \overline{-ax}} = \sqrt{ax} = \pm y$. Alle $x$ negative per tanto corrispondono le $y$ reali, ed il ramo *MAN* della parte dei negativi (*Fig.* 144.) sarà affatto simile al *BAC* dalla parte dei positivi, avverandosi rispetto ad entrambi l'equazione $\sqrt[4]{aaxx} = \sqrt{ax} = \pm y$. Ma la parabola apolloniana non â il ramo dalla parte dei negativi, poichè posta $x$ negativa, si â $\sqrt{-ax} = \pm y$, curva immaginaria.

Se si alzerà l'equazione $ax = yy$ alla terza potestà, la curva corrispondente alla equazione $a^3x^3 = y^6$ non sarà, che la sola parabola apolloniana. Alzata l'equazione $ax = yy$ alla quarta potestà, la curva corrispondente alla formola $a^4x^4 = y^8$ torna ad essere la parabola appolloniana raddoppiata in senso contrario. Generalmente se la potestà, a cui si alza la formola $ax = yy$,

ſarà pari, ſoddisfarà la parabola apolloniana raddoppiata; e ſe ſarà diſpari, ſoddisfarà la parabola apolloniana ſemplice.

Una tale dottrina ſi può applicare a tutte le parabole, ed iperbole prime, la di cui equazione canonica ſi è (prendendo per $n$ un numero qualunque intiero affermativo, o negativo) $a^{n-1}x = y^n$. Alzata queſta a potestà pari, la curva propria della nuova equazione ſarà la parabola, o iperbola $a^{n-1}x = y^n$ raddoppiata in ſenſo contrario. Se la poteſtà ſarà diſpari, ſvanirà il raddoppiamento, e reſterà la curva ſemplice propria dell'equazione $a^{n-1}x = y^n$.

251. Dalla coſtruzione delle parabole di qualunque grado ſi fa paſſaggio alla coſtruzione degl' Iperboloidi pure di qualunque grado.

Gli iperboloidi del terzo grado ſono due, cioè $a^3 = xxy$, $a^3 = xyy$. Sia propoſto da coſtruirſi l'iperboloide dell'equazione $a^3 = xxy$. Queſta curva avrà due rami, che vanno agl'aſintoti, e l'uno, e l'altro avrà le ordinate poſitive, ma le aſſiſſe in uno ſaranno poſitive, negative nell'altro.

Per coſtruirla: pongo $xx = az$, e ſoſtituendo, ſarà $aa = zy$. Fra gl' aſintoti $AM$, $AG$ (*Fig.* 145.) ſi deſcriva l'iperbola $FQ$ dell'equazione $aa = zy$. Preſa adunque $AG = z$, ſarà $GF = y$, indi dal punto $G$ in angolo ſemiretto ſi ſi conduca $GB$, e ſarà $AB = AG = z$; all'aſſe $AB$ ſi deſcri-

descriva la parabola $CAE$ dell'equazione $az = xx$, indi condotte le ordinate $BC$, $BE$, e le indefinite $CK$, $EP$ parallele alla $BA$, sarà $AH = BE = x$, e tirata $FK$ parallela a $GD$, sarà $HP = GF = y$. Isteſſamente sarà $AD = BC = -x$, $DK = y$, ed i punti $P$, $K$ saranno nella curva proposta.

Ommetto la costruzione dell'equazione $a^3 = xyy$, perchè è la medesima, mutandosi solo le veci delle coordinate.

252. Sia proposto l'iperboloide del quarto grado, e sia l'equazione $a^4 = x^3y$. Questa curva avrà due rami, che vanno agl'asintoti, in uno de' quali sarà $x$ positiva, ed $y$ positiva, e nell'altro $x$ negativa, ed $y$ negativa.

Pongo $x^3 = aaz$, dunque sostituendo, si avrà $zy = aa$. Fra gl'asintoti $MF$, $TG$, (*Fig.* 146.) indefinitamente prodotti, si descriva l'iperbola $ER$, $KO$ dell'equazione $zy = aa$, e sarà $AF = z$, $FE = y$, $AM = -z$, $MK = -y$; dal punto $F$ si tiri $FG$ in angolo semiretto, a cui sia parallela $MT$, e sarà $AG = AF = z$; $AT = AM = -z$. All'asse $TG$ si descriva la parabola cubica $SAH$ dell'equazione $x^3 = aaz$, e sarà $AI = GH = x$, $AP = TS = -x$; onde condotte le rette $EC$, $KV$ parallele alla $AI$, sarà $IC = y$, $PV = -y$, ed i punti $C$, $V$ nella curva proposta.

Quì pure ommetto la costruzione dell'equazione $a^4 = xy^3$, perchè è la medesima, mutandosi solo le ve-

ci delle coordinate. Ommetto ancora la costruzione dell' equazione $a^4 = xxyy$, perchè questa si riduce all' iperbola apolloniana.

253. Sia proposta la curva iperboloide del quinto grado, e sia in primo luogo l'equazione $a^5 = x^4 y$. Questa avrà due rami, che vanno agl' asintoti, in uno de' quali presa $x$ positiva, sarà pure positiva la $y$; nell' altro presa la $x$ negativa, ciò non ostante, sarà la $y$ positiva.

Pongo $x^4 = a^3 z$, dunque sostituendo, sarà $aa = zy$. Fra gl' asintoti $AG$, $AM$ si descriva l' iperbola apolloniana $FQ$ dell' equazione $aa = zy$, (*Fig.* 145.) onde presa $AG = z$, sarà $GF = y$. Dal punto $G$ in angolo semiretto si conduca la $GB$, e sarà $AB = AG = z$. All' asse $AB$ si descriva la parabola $CAE$ dell' equazione $x^4 = a^3 z$, e sarà $BE = AH = x$, $BC = AD = -x$, e condotta $FK$ parallela alla $GD$, e le $CK$, $EP$ perpendicolari alla stessa, sarà $HP = DK = GF = y$, ed i punti $P$, $K$ nella curva proposta.

Sia l' altra equazione $a^5 = x^3 yy$ dell' iperboloide dello stesso grado, questa avrà due rami, imperocchè alla stessa $x$ positiva corrispondono due ordinate $y$, una positiva, negativa l'altra.

Pongo $x^3 = aaz$, dunque sostituendo, sarà $a^3 = zyy$. Fra gl' asintoti $DM$, $CN$ (*Fig.* 147.) sia descritto l' iperboloide $RG$, $FV$ dell' equazione $a^3 = zyy$, ed essendo

do $AH = y$, $AP = -y$, sarà $HI = z = PK = AB$. All'asse $PH$ si descriva la parabola cubica $AS$ dell'equazione $x^3 = aaz$, indi dal punto $B$ si conduca ad angolo semiretto la $BQ$, e si alzi la perpendicolare $QS$, sarà adunque $AQ = z$, $QS = x$. Per lo punto $S$ si conduca la retta $OT$ parallela all'asintoto $NC$, e che incontri le prodotte $HI$, $PK$ ne' punti $T$, $O$; essendo adunque $AH = y$, sarà $HT = x$, $AP = -y$, $PO = x$, ed i punti $O$, $T$ saranno nella curva proposta.

Le costruzioni dell' altre due equazioni $a^5 = xxy^3$, $a^5 = xy^4$ sono le medesime, mutandosi solo le veci delle coordinate. Con lo stesso artifizio si costruiranno facilmente tutti gl'iperboloidi di qualunque grado.

254. E' da notarsi, che tutte le parabole prime descritte intorno ad un'asse medesimo si tagliano nel medesimo punto; imperciocchè presa per ciascuna di esse la medesima assissa $x = a$, sarà per tutte la medesima ordinata corrispondente $y = a$, il che non può essere se non tagliandosi tutte nel medesimo punto.

255. In oltre, le parabole superiori di dimensioni (intendendo delle prime) cadono prima di arrivare al punto della sezione al di sopra delle inferiori, avvicinandosi più alla tangente nel vertice, e dopo la sezione più quelle, che queste, si accostano all'asse; poichè essendo nella parabola apolloniana $y = \sqrt{ax}$,

nella

nella prima cubica $y = \sqrt[3]{aax}$, nella prima del quarto grado $y = \sqrt[4]{a^3x}$ ec., se si prenda $x$ minore di $a$, sarà $\sqrt{ax}$ minore di $\sqrt[3]{aax}$, e $\sqrt[3]{aax}$ minore di $\sqrt[4]{a^3x}$ ec.; ed all'opposto, presa $x$ maggiore di $a$, sarà $\sqrt{ax}$ maggiore di $\sqrt[3]{aax}$, e $\sqrt[3]{aax}$ maggiore di $\sqrt[4]{a^3x}$ ec.

Isteſſamente, e per simil ragione gli iperboloidi (intendendo pure de' primi) si tagliano tutti nel vertice, ed i superiori di dimensioni cadono dopo il punto della sezione al di dentro tra gl' inferiori, e l'asintoto, su cui si prendono le $x$; e dalla parte dell'asintoto parallello alla $y$ gl'inferiori cadono al di dentro tra i superiori, e l'asintoto stesso.

256. Restano ora da costruirsi quelle equazioni, che ânno più termini, le quali io distinguo in tre casi. Chiamo del primo caso quelle, che ânno un solo termine, in cui sia l'indeterminata $y$, e questa di una sola dimensione. Del secondo caso quelle, che ânno un solo termine, in cui sia l' indeterminata $y$, e questa elevata a qualunque potestà. Del terzo caso quelle, in molti termini delle quali si ritrova l'indeterminata $y$, ed elevata a qualunque potestà.

CASO

## CASO I. ESEMPIO I.

257. Sia propoſta da coſtruirſi la curva dell' equazione $a^4 - x^4 = a^3 y$. Pongo $y = t - q$, e faccio le due equazioni $a^4 = a^3 t$, $x^4 = a^3 q$. All'aſſe $AB$ (*Fig.* 148.) deſcrivaſi la parabola $MAC$ dell'equazione $x^4 = a^3 q$, ed eſſendo $AD = q$, ſarà $DH = x$, $DF = -x$. Ma per l'equazione $a^4 = a^3 t$, ſarà $t = a$, e però preſa $AB = a = t$, ſarà $DB = t - q$, cioè $= y$; onde preſa ad arbitrio una qualunque aſſiſſa $BS = DH = x$, e $BO = DF = -x$, le $SH$, $OF$, parallele a $BA$, ſaranno le corriſpondenti ordinate della curva propoſta, la quale è una porzione della medeſima parabola del quarto grado.

## ESEMPIO II.

258. Sia propoſta da coſtruirſi la curva dell'equazione $x^4 + ax^3 = a^3 y$. Queſta curva, per le regole già note, ſi fa avere tre rami, due infiniti, e poſitivi, ed uno negativo con un maſſimo, che per ora non ſi fa riconoſcere, e l'aſſe ſarà tagliato in due punti. Pongo $y = z + t$, e faccio le due equazioni $x^4 = a^3 z$, $x^3 = aat$. All'aſſe $AB$ (*Fig.* 149.) ſi deſcriva la parabola $MAD$ dell'equazione $x^4 = a^3 z$, ed eſſendo $AF = z$, ſarà $FD = AE = x$. Per lo medeſimo punto $A$ ſi deſcriva la parabola

rabola cubica $CAP$ dell'equazione $x^3 = aat$, ed alla medesima $x$ corrispondera $PE = t$, onde essendo $AE = x$, sarà $PE + ED = z + t = y$, fatta $PD$ parallela alla $AF$, dal che si vede, che presa $x$ positiva, la $y$ cresce in infinito.

Presa poi $x$ negativa, sarà $t$ negativa, e per conseguenza $y = z - t$. Sia $AG = x$ negativa, sarà $GM = z$, $GT = t$, onde $y = MT$ negativa, e fra tutte le $MT$ vi è una massima. Presa $x = -a$, sarà $GM = GT$, onde $y = 0$. Presa $x$ negativa, e maggiore di $a$, sarà $GM - GT$ quantità positiva, onde la $y$ sarà positiva, e crescerà in infinito.

La curva sarà a un di presso della seguente forma, prendendo le $x$ dal punto $A$. (*Fig.* 150.)

## ESEMPIO III.

259. Sia proposta da costruirsi la curva dell'equazione $x^4 + ax^3 - aaxx = a^3y$. Questa curva avrà quattro rami; due positivi, ed infiniti; due negativi, e finiti. In due punti taglierà l'asse, ed in uno lo toccherà, avrà due massimi negativi ec.; il che si saprà dalle regole da darsi a suo luogo.

Pongo $y = z - q$, e faccio le due equazioni $x^4 + ax^3 = a^3z$, $-xx = -aq$. La curva dell'equazione $x^4 + ax^3 = a^3z$ già si fa costruire in virtù di questo metodo, e

sia

ſia queſta $CBADG$, ( *Fig.* 151. ) in cui preſa $AK = x$ poſitiva, ſarà $KG = z$; preſa $x$ negativa $= AP$, ſarà $z$ negativa $= PB$, preſa $x$ negativa, e maggiore di $AO$, ſarà $z$ poſitiva. All'aſſe $AN$ ſi deſcriva la parabola $TAH$ dell'equazione $xx = aq$. Eſſendo dunque $AK = x$ poſitiva, ſarà $KH = q$, e $GH = z - q = y$, la quale creſcerà in infinito, creſcendo la $x$ in infinito. Nel punto $F$, ſarà $z = q$, ed $y = 0$. Fra il punto $F$, ed il punto $A$, ſarà $q$ maggiore di $z$, onde $z - q$ ſarà quantità negativa, ed $y$ negativa, e vi ſarà un maſſimo negativo. Nel punto $A$ ſarà $z = 0$, $q = 0$, $y = 0$. Preſa $x$ negativa $= AP$, ſarà $z = BP$, e negativa, onde ſempre $y$ negativa. Fra il punto $A$, ed il punto $O$ vi ſarà una maſſima $BQ$, onde vi ſarà una maſſima $y$ negativa. Preſa $x$ negativa, e maggiore di $AO$, ſarà $z$ poſitiva, ma minore di $q$, onde $y$ negativa. Preſa $x$ negativa, ed eguale ad $AM$, ſarà $z = q$, ed $y = 0$. Preſa $x$ negativa, e maggiore di $AM$, ſarà ſempre $z$ maggiore di $q$, onde ſempre $y$ poſitiva in infinito.

Se l'equazione ſarà più numeroſa di termini, lo ſteſſo artifizio ſervirà, ed abbenchè la coſtruzione in queſto caſo ſi faccia più compoſta, ed imbrogliata, tuttavìa però non sfugge il metodo.

Si poteva in altra maniera ancora coſtruire l'ultima equazione, facendo $y = z + t - q$, indi $x^4 = a^3 z$, $x^3 = aat$, $-xx = -aq$, e col mezzo di queſte tre curve auſilia-

rie passare alla costruzione della principale, il che ommetto per brevità.

260. Può forse sembrare, che nelle passate costruzioni, e nelle poche, che seguono, sia necessario che l'angolo delle coordinate sia retto, essendosi tale supposto; ma se ben si rifletta, si vedrà, che esso angolo può essere, come si vuole, quando si usi qualche piccola attenzione intorno all'angolo delle coordinate delle curve sussidiarie introdotte, relativamente all'angolo delle coordinate dell'equazione proposta.

## CASO II. ESEMPIO IV.

261. Sia proposta da costruirsi l'equazione $x^n \pm a^s x^{n-s} \pm a^m x^{n-m} \pm$ ec. $= y^t$. Pongo $y^t = a^{t-1} z$, e sostituendo questo valore in luogo della $y^t$, l'equazione sarà $x^n \pm a^s x^{n-s} \pm a^m x^{n-m} \pm$ ec. $= a^{t-1} z$: col metodo del primo caso si costruisca questa curva, poscia si descriva la parabola dell'equazione $y^t = a^{t-1} z$, e si avrà la relazione tra le $x$, e le $y$ della curva proposta.

CASO

## CASO III. ESEMPIO V.

262. Sia propoſta da coſtruirſi l'equazione

$$x^m \pm ax^n \pm bx^s \pm \text{ ec.} = y^p \pm y^q \pm \text{ ec.}$$

Pongo $y^p \pm y^q \pm$ ec. $= z$, dunque ſoſtituendo, l'equazione ſarà $x^m \pm ax^n \pm bx^s$ ec. $= z$. Col metodo del primo caſo ſi coſtruiſca l'una, e l'altra di queſte due curve auſiliarie al medeſimo aſſe, in cui ſi prendono le $z$, e ſi avrà la relazione delle due coordinate $x$, ed $y$ della curva propoſta.

263. Sino ad ora non ſono ſtate da me conſiderate ſe non quelle equazioni, che ânno le incognite ſeparate, così che, quando eſſe incognite ſono miſte fra loro, le regole date non ânno più luogo.

In queſti caſi biſogna, o con l'ordinaria diviſione, o con l'eſtrazione delle radici, o con una congrua ſoſtituzione, o con altri ripieghi procurare di ſeparare le indeterminate medeſime. Come ſe foſſe l'equazione $a^3y + axxy = aaxx + x^4$, dividendo per $a^3 + axx$, ſarebbe $y = \frac{aaxx + x^4}{a^3 + axx}$; e ſe foſſe l'equazione $aaxy + xxyy = x^4 + a^4$, fatta la ſoſtituzione $z = \frac{yx}{a}$; avremmo l'equazio-

ne $a^3z + aazz = x^4 + a^4$, nella quale le incognite sono separate.

Così preparate le proposte equazioni, si passa alla costruzione nella seguente maniera.

## ESEMPIO VI.

264. Sia l'equazione da costruirsi $y = \frac{aaxx + x^4}{a^3 + axx}$.

Pongo $aaxx + x^4 = a^3p$; pongo di più $a^3 + axx = aat$, e sostituendo questi valori nell'equazione proposta, sarà $y = \frac{ap}{t}$, cioè $t, p :: a, y$.

La curva proposta avrà due rami, che vanno all' infinito; alle $x$ tanto positive, quanto negative corrisponderanno le $y$ positive.

All'asse $HD$ (*Fig.* 152.) si descriva la curva $LAC$ dell'equazione $aaxx + x^4 = a^3p$, e pigliando $AD = x$, sarà $DC = p = AB$. Si prenda $AF = a = AM$, indi col vertice $F$, all'asse $HD$ si descriva la curva $PFE$ dell' equazione $a^3 + axx = aat$, e pigliando $AD = x$, sarà $DE = t$, onde essendo $DC = p$, sarà $DE = t$, e fatta $EG$ parallela ad $AD$, dal punto $G$ si tiri in angolo semiretto la $GH$, sarà $AH = t$. Dal punto $C$ si tiri

CB

$CB$ parallela a $DA$, e ſi conduca la retta $BH$, a cui ſia parallela $MK$, ſarà $AK = y$, eſſendo $AD = x$; imperocchè, per i triangoli ſimili $AMK$, $AHB$, ſarà $AH$, $AB :: AM$, $AK$, cioè $t$, $p :: a$, $AK = \frac{ap}{t} = y$, onde condotta parallela all'aſſe la $KQ$, saranno le $AD$, $DQ$ le due coordinate della curva propoſta. Per avere l'altro ramo della noſtra curva, baſta prendere le $x$ dalla parte dei negativi, e replicare nella parte contraria la medeſima coſtruzione.

## ESEMPIO VII.

265. Sia ora propoſta da coſtruirſi l'altra equazione $aaxy + xxyy = x^4 + a^4$, la quale trattata colle regole delle quadratiche affette avrà le incognite ſeparate; ovvero colla ſoſtituzione $z = \frac{xy}{a}$ ſi ridurrà ad eſſere $a^3z + aazz = x^4 + a^4$. Col metodo del terzo caſo ſi coſtruiſca queſta equazione, e ſi averanno le due coordinate $x$, $z$; indi ſi faccia l'analogìa $x$, $z :: a$ al quarto, che ſarà la $y$ ec. Se una ſoſtituzione non gioverà per liberare le indeterminate dalla confuſione, ſe ne devono tentare dell' altre, e quando niuna ſerva, le equazioni sfuggono il metodo eſpoſto, onde biſogna ricorrere ad altri artifizj.

266.

266. Una congrua sostituzione può servire negl'altri casi ancora, ne' quali le indeterminate sono separate, e quindi alle volte somministrare una costruzione più facile, e più elegante, e però sarà sempre bene mettere alla prova diversi artifizj, ed in fine appigliarsi a quello, che si giudicherà migliore.

## ESEMPIO VIII.

267. Sia l'equazione $y^4 - 4ay^3 + 4aayy = 2a^3x$. Faccio $2a^3x = z^4$, e però sarà $y^4 - 4ay^3 + 4aayy = z^4$; cioè $yy - 2ay = zz$, o pure $2ay - yy = zz$.

Costruisco adunque questo luogo, che sarà nel primo caso alle due Iperbole equilatere opposte coll'asse trasverso $= 2a$; ed al Circolo nel secondo caso col diametro $= 2a$, e generalmente a quelle, ed a questo insieme. Al diametro trasverso $AB = 2a$ ( *Fig.* 153. ) sieno descritte le due iperbole equilatere $AMH$, $BMH$, ed il circolo $AMB$; indi descritta al vertice $A$ la parabola dell'equazione $2a^3x = z^4$, ed alzata la perpendicolare $AQ$ indefinita, e presa una qualunque $AD = z$, indi condotta $MM$ parallela ad $AB$, saranno le $DS = x$, e le $DM = y$ positive nel circolo, e nell'iperbola da $A$ verso $B$; e

ne-

negative nell' iperbola dalla parte oppoſta, e la curva ſarà a un di preſſo, come $KAGBF$, (*Fig.* 154.) in cui i due rami $AK$ negativo, e $BF$ poſitivo vanno all' infinito, nè avrà ramo alcuno al di ſotto dell' aſſe $AB$, perchè non può mai avere la $x$ negativa.

CAPO

# CAPO VI.

## *Del metodo de' Massimi, e Minimi, delle Tangenti delle Curve, de' Flessi contrarj, e Regressi, facendo uso della sola Algebra Cartesiana.*

268. Quantunque il calcolo degl' infinitesimi sia il più semplice, il più breve, ed il più universale per trattare tali questioni, non voglio però, prima di terminare l'Algebra Cartesiana, lasciare di mostrare brevemente, e per modo d'erudizione, come le soluzioni di questi quesiti possano nelle curve geometriche (cioè in quelle, che sono espresse da equazione finita algebraica) aversi senza l'ajuto del calcolo differenziale.

E per cominciare da' Massimi, e da' Minimi, vale a dire dal ritrovare nelle curve geometriche le massime, o le minime ordinate; sia la curva $AGB$ (*Fig.* 155., *e* 156.), e presa una qualunque ordinata $DM$, si tiri $MF$ parallela all'asse delle assisse $AB$, saranno eguali le due ordinate $DM$, $EF$, alle quali corrispondono due diverse assisse $AD$, $AE$; ma quanto più le ordinate $DM$, $EF$ anderanno egualmente accostandosi fra di loro, sempre minore si farà la differenza delle assisse $AD$, $AE$, finchè cadendo finalmente le due ordinate $DM$, $EF$ nella massi-

massima $CG$, o le due $LM$, $NF$ nella minima $IG$, si faranno eguali le assisse $AD$, $AE$, o le $HL$, $HN$ rispetto all'asse $HK$. Adunque quando l'ordinata sia la massima, o la minima, l'equazione della curva disposta secondo la lettera, che esprime l'assissa, dovrà avere due radici eguali. Per determinarle si formi un' equazione di due radici eguali, per esempio $xx - 2ex + ee = 0$, che è il prodotto di $x - e$ in $x - e$, e sia la curva, di cui si cerca la massima, o la minima ordinata, per esempio l'ellisse $xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$, denominate le assisse dal vertice. Si paragoni questa equazione, termine per termine, coll'equazione formata dalle due radici eguali, nel seguente modo

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$$

$$xx - 2ex + ee = 0;$$

dal paragone de' secondi termini si trova $a = e$, ma $e$ è radice dell'equazione $xx - 2ex + ee = 0$, e però $e = x$, adunque sarà $a = x$, e perchè è già determinata la $x$, è superfluo il paragone degl'ultimi termini.

Presa per tanto $x = a$, la corrispondente ordinata nell'ellissi sarà la massima, come già si sa, essendo allora essa il semiasse conjugato.

Ma se l'equazione della curva fosse del terzo, quarto, o superiore grado, a fine di potere instituire il pa-

ragone, fa d'uopo, che l'equazione delle due radici eguali $xx - 2ex + ee = 0$ si riduca a quel grado, di cui è la proposta, moltiplicandola per tante radici qualunque esse sieno, quante fanno di bisogno. Sia la curva dell'equazione del terzo grado $x^3 * - axy + y^3 = 0$ (la stelletta è posta in luogo del secondo termine mancante, il che si osservi sempre qualora manca un qualche termine) di cui si cerchi la massima ordinata, moltiplico adunque per $x - f = 0$ l'equazione $xx - 2ex + ee = 0$, ed il prodotto lo paragono colla proposta

$$\begin{array}{l} x^3 \quad * \quad - axy + y^3 = 0 \\ \left.\begin{array}{l} x^3 - 2exx + eex - eef \\ \quad - fxx + 2efx \end{array}\right\} = 0 . \end{array}$$

Dal paragone de' secondi termini trovo $-2e - f = 0$; e però $f = -2e$; dal paragone de' terzi trovo $2ef + ee = -ay$, e posto il valore di $f$, $-3ee = -ay$, ma $e = x$, adunque $y = \frac{3xx}{a}$. Si sostituisca in luogo di $y$ questo valore nell' equazione della curva, e ci darà $x = \frac{\sqrt[3]{2a^3}}{3}$, a cui corrisponde la massima ordinata $y$, che sarà $\frac{a}{3} \times 2^{\frac{2}{3}}$, cioè $\frac{\sqrt[3]{4a^3}}{3}$.

269. Ma senza paragonare la data equazione con un'altra, che contenga le due radici eguali, per soddisfare alla condizione del problema, basterà moltiplicarla,

ter-

termine per termine con una ſerie aritmetica qualunque, imperciocchè ſe l'equazione â le due radici eguali, come deve nel caſo dei maſſimi, e minimi, infallibilmente una di eſſe radici ſarà anco nel prodotto di eſſa equazione moltiplicata per la ſerie aritmetica, quindi moltiplicando così l'equazioni s'include la condizione, ſotto cui deveſi ritrovare il valore dell'aſſiſſa, a cui corriſponde la ricercata maſſima, o minima ordinata. E per dimoſtrarlo: ſia generalmente l'equazione di due radici eguali $xx - 2hx + hh = 0$, che ſi moltiplichi per la ſerie aritmetica $a$, $a + b$, $a + 2b$, ſarà il prodotto $\begin{matrix} axx - 2ahx + ahh \\ - 2bhx + 2bhh \end{matrix} = 0$, in queſto ſoſtituita la quantità $h$ in luogo di $x$, tutti i termini ſi diſtruggono, o pure dividendolo per $x - h$, ſuccede la diviſione, adunque $x - h$ ſarà una radice di eſſo prodotto, ſiccome è di $xx - 2hx + hh$; lo ſteſſo ſuccede ſe la progreſſione aritmetica ſia decreſcente, cioè $a$, $a - b$, $a - 2b$ ec.

E perchè l'equazione delle due radici eguali è generale, ed è generale altresì la ſerie aritmetica $a$, $a + b$, $a + 2b$ ec., ſarà ſempre vero, che moltiplicata un'equazione di due radici eguali per una ſerie aritmetica qualunque, termine per termine, ſarà il prodotto diviſibile per una di eſſe radici. Per la ſteſſa ragione, ſe l'equazione avrà tre radici eguali, moltiplicata eſſa in una ſerie aritmetica, il prodotto averà due di eſſe radici e-

 guali,

guali, e se questo prodotto si moltiplicherà similmente per una serie aritmetica, il nuovo prodotto ne avrà una, e così discorrendo d'equazioni superiori.

Ripiglio l'equazione $xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0$ all'ellissi, la moltiplico per la serie 2, 1, 0

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0.$$
$$2, \quad 1, \quad 0.$$

Il prodotto è $2xx - 2ax = 0$, che ci dà $x = a$, come si è trovato di sopra. Moltiplico questa stessa equazione con un'altra serie aritmetica 3, 2, 1

$$xx - 2ax + \frac{2ayy}{p} = 0.$$
$$3, \quad 2, \quad 1.$$

Il prodotto è $3xx - 4ax + \frac{2ayy}{p} = 0$, in cui sostituito in luogo della $yy$ il valore $\overline{2ax - xx} \times \frac{p}{2a}$, dato dall'equazione della curva, si trova istessamente $x = a$.

Prendo la seconda equazione $x^3 * - axy + y^3 = 0$, che moltiplico con la serie 3, 2, 1, 0

$$x^3 \; * \; - axy + y^3 = 0.$$
$$3, \; 2, \; 1, \; 0.$$

Il prodotto è $3x^3 - axy = 0$, cioè $3xx = ay$, come sopra.

270. Con ſimil metodo ſi trovano le tangenti, e le perpendicolari alle curve in qualunque punto dato.

La queſtione ſi riduce a ritrovare il circolo, che tocchi la curva in quel punto, eſſendo in queſto caſo sì la tangente del circolo in quel punto, come la perpendicolare, cioè il raggio, comuni pure alla curva nel punto ſteſſo.

Sia la curva $ACM$ ( *Fig.* 157. ), di cui ſi voglia la tangente nel punto $L$, e ſia il circolo $GMH$, che la tagli ne' due punti $M$, $C$; abbaſſate le due ordinate $CE$, $MP$, e per i punti $M$, $C$, condotta la retta $MCT$, taglierà eſſa la curva pure ne' punti $M$, $C$; ma quanto più ſi anderanno accoſtando i detti punti, minore ſempre ſi farà la differenza delle ordinate $CE$, $MP$, e delle aſſiſſe $AE$, $AP$ di modo, che quando un punto cada ſopra dell'altro, per eſempio in $L$, ſaranno eguali i valori di queſte ordinate, ed aſſiſſe, ed allora il circolo toccherà la curva nel punto $L$, ( a riſerva però, che il circolo ſia l'oſculatore, perchè in quel caſo taglia la curva, e la tocca nello ſteſſo punto, come ſi vedrà nel calcolo differenziale ) e la retta $MT$ ſarà la tangente della curva, e del circolo nel punto $L$, ſiccome $FL$ normale.

Si chiami adunque nella curva $ALM$ ( *Fig.* 158. ) la $AQ = x$, $QL = y$, e condotta dal punto dato $L$ la

retta

retta $LN$, che si supponga normale alla curva; ed in conseguenza alla tangente in $L$, sia $LN=s$, $AN=u$, sarà $QN=u-x$, ed il triangolo rettangolo $QLN$ darà l'equazione canonica $ss=uu-2ux+xx+yy$, da cui ricavato il valore della $y$, o della $x$, si sostituisca nell'equazione della curva data, per mezzo della quale si deve avere il valore della $s$, o della $u$, considerando come data la $x$, o la $y$, poichè si assume per dato il punto $L$.

Sia per esempio la curva $ALM$ la parabola apolloniana dell'equazione $ax=yy$; fatta la sostituzione in luogo della $yy$, del suo valore dato dall'equazione canonica, sarà l'equazione $ax=ss-uu+2ux-xx$, ed ordinata per la lettera $x$ sarà $xx-2ux+uu=0$. Que-
$\phantom{xx}+ax-ss$

sta adunque deve avere due radici eguali quando la retta $LN=s$ sia normale alla parabola nel punto $L$, cioè nel caso della tangente, e però ritrovato nell'ipotesi delle due radici eguali il valore della incognita $AN=u$, si averà il punto $N$, da cui condotta la $NL$ al dato punto $L$, e la perpendicolare $LT$ ad $NL$, sarà essa la tangente cercata.

Ora per determinare la incognita $u$ nell'ipotesi delle due radici eguali; paragono l'equazione, termine per termine, con una di due radici eguali, cioè

con

con $xx - 2ex + ee = 0$ nel seguente modo

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2ux + uu \\ \quad + ax - ss \end{array}\right\} = 0$$

$$xx - 2ex + ee = 0;$$

e dal paragone de' secondi termini si avrà $-2u + a = -2e$, cioè $u = \frac{a + 2e}{2}$, ma $e = x$, per l'equazione $xx - 2ex + ee = 0$; dunque $u = \frac{a}{2} + x$, e perciò dal punto $Q$ presa $QN = \frac{1}{2}a$, sarà $NL$ la normale, ed $LT$, ad essa perpendicolare, sarà la tangente della curva nel punto $L$.

In vece di paragonare la suddetta equazione con una di due radici eguali, la moltiplico colla serie aritmetica 3, 2, 1

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2ux + uu \\ \quad + ax - ss \end{array}\right\} = 0$$

$$3, \quad 2, \quad 1.$$

Il prodotto è $\left.\begin{array}{l} 3xx - 4ux + uu \\ \quad + 2ax - ss \end{array}\right\} = 0$, ma $ss = uu - 2ux + xx + yy$, e per la parabola è $yy = ax$, onde $ss = uu - 2ux + xx + ax$; sostituito adunque questo valore in luogo di $ss$, sarà $2xx - 2ux + ax = 0$, cioè $u = \frac{a}{2} + x$, come prima.

Più brevemente si avrebbe avuto l'intento molti-

tiplicando l'equazione per la ferie aritmetica 2, 1, 0.

271. Sia la feconda parabola cubica $x^3 = ayy$; fatta la foftituzione del valore di $yy$ cavato dall'equazione canonica, nafce l'equazione $x^3 + axx - 2aux + auu \atop - ass$ $= 0$, la quale per effere del terzo grado fi paragoni col prodotto dell'equazione $xx - 2ex + ee = 0$ in $x - f = 0$

$$x^3 + axx - 2aux + \begin{matrix} auu \\ - ass \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} x^3 - 2exx + eex - eef \\ - fxx + 2efx \end{matrix} = 0;$$

dal paragone de' fecondi termini fi â $-2e - f = a$, cioè $f = -a - 2e$; dal paragone de' terzi fi â $ee + 2ef = -2au$, e pofto il valore già ritrovato di $f$, $u = \frac{3ee + 2ae}{2a}$, cioè $u = \frac{3xx + 2ax}{2a}$, perchè $e = x$.

Moltiplico ora l'equazione con la ferie aritmetica 3, 2, 1, 0

$$\begin{matrix} x^3 + axx - 2aux + auu \\ \phantom{x^3 + axx - 2aux} - ass \end{matrix} = 0$$

$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0;$$

il prodotto è $3x^3 + 2axx - 2aux = 0$, e però ifteffamente $u = \frac{3xx + 2ax}{2a}$.

272. Circa l'elezione delle ferie aritmetiche fi può offervare, che per lo più farà la più comoda quella, che

che formano gl'esponenti cominciando dal massimo della lettera, secondo cui è ordinata l'equazione.

273. Un'altra maniera di sciogliere questo Problema poco diversa, ma forse più semplice, e che avrà uso ne' flessi contrarj, e ne' regressi può essere questa.

Sia la curva $AEMD$ ( *Fig.* 159. ) tagliata dalla retta $HED$ ne' punti $E, D$; e sieno le assisse $AB, AC = x$, le ordinate $BE$, $CD = y$. E' chiaro, che passando la retta $HD$ ad essere la tangente $TM$ della curva nel punto $M$, i due punti $E$, $D$ caderanno in $M$, e per conseguenza si faranno eguali tra loro le $AB$, $AC$, siccome tra loro le $BE$, $CD$. Si alzi $AN$ parallela alle ordinate, e sia $AT = u$, $AN = s$, per la similitudine de' triangoli $TAN$, $TKM$, sarà $u, s :: u + x, y$, cioè $y = \frac{us + sx}{u}$, ed $x = \frac{uy - us}{s}$; nell'equazione della curva data si sostituiscano questi valori in luogo della $y$, o della $x$, e ne nascerà un'altra, la quale dovrà avere due radici eguali, quando $AT$, $AN$ sieno tali, che la retta $TNM$ tocchi la curva, adunque facendo il paragone con un'altra di due radici eguali, o moltiplicandola per una serie aritmetica, si averà il valore della ricercata $AT$, o $AN$, e data l'una, è pure data l'altra. Ommetto gl' esempj, perchè la maniera di operare è la stessa della usata di sopra.

274. Siccome il metodo, e la natura de' massimi, e minimi, e delle tangenti include necessariamente nelle equazioni due radici eguali, così tre radici eguali si danno ne' Flessi contrarj, e ne' Regressi. Per flesso contrario s'intende quel punto, in cui la curva da concava si fa convessa, o all'opposto; e per regresso quel punto, in cui essa torna all'indietro, o concava, o convessa.

Sia la curva $ACFM$, (*Fig.* 160.) che abbia un flesso contrario nel punto $F$, e si conduca la retta $GCM$, che la tocchi nel punto $C$, e la tagli nel punto $M$, abbassate da essi le ordinate $CH$, $MP$, facilmente si vede, che quanto più il punto $C$ della tangente s'accosterà al punto del flesso contrario $F$, tanto più altresì si accosterà al punto $F$ il punto $M$ di modo, che quando $C$ cada in $F$, vi caderà pure $M$; ed in conseguenza si faranno eguali $AH$, $AP$, siccome $CH$, $MP$, e la retta $GCM$ toccherà, e taglierà la curva nel punto $F$; ma la natura della tangente già porta due radici eguali, ed ora si aggiunge la terza, adunque di natura del flesso contrario è, che a lui corrispondano tre radici eguali.

Dal punto $A$ alzata $AN$ parallela all'ordinate, e fatta $AN = s$, $AT = u$, e condotta $TNF$; sarà,

per

per i triangoli simili $TAN$, $TVF$, $y = \frac{us + sx}{u}$, ed $x = \frac{uy - us}{s}$, chiamate $AV = x$, $VF = y$. Sostituiti per tanto questi valori in luogo di $x$, o di $y$ nell' equazione della curva data, l'equazione, che nasce, dovrà avere tre radici eguali quando $AT$, o $AN$ sieno tali, che la $TNF$ condotta dal punto $T$ per lo punto $N$ incontri la curva nel ricercato punto del flesso contrario $F$.

Similmente si discorra della curva $ACM$, (*Fig.* 161.) che abbia un regresso nel punto $C$; poichè la tangente $TC$ della curva nel punto $C$ assieme la taglia nello stesso punto, e quindi ne nascono nella stessa maniera le tre radici eguali.

Sia la curva $AFS$ (*Fig.* 162.) dell' equazione $ayy - xyy - aax = 0$, in cui sono le $AQ = x$, e le $QF = y$, e si cerchi il punto del flesso contrario $F$. Posta $AT = u$, $AV = s$, e parallela alle ordinate $QF$, e sostituito in luogo di $x$ il valore $\frac{uy - us}{s}$ nell' equazione della curva, sarà essa

$$y^3 - \frac{asyy}{u} + aay - aas = 0,$$
$$- syy$$

la

la quale dovrà avere tre radici eguali, e però si avrà da paragonare con una equazione di tre radici eguali, o da moltiplicarsi per due serie aritmetiche.

Si moltiplichi adunque per la serie 1, 0, —1, —2, ed il prodotto $y^3 * - aay + 2aas = 0$, di nuovo moltiplicato per la serie 3, 2, 1, 0, ci darà $3y^3 - aay = 0$, e però $yy = \frac{aa}{3}$, il qual valore sostituito nell' equazione data della curva ci fornisce finalmente $x = \frac{1}{4} a$.

275. La maniera è la stessa per ritrovare i regressi delle curve, ed il metodo dà tanto questi, come quelli; quindi per distinguerli non vi è altro modo, che il ricercare per mezzo della costruzione l' andamento della curva.

L' istessa ambiguità nasce nelle questioni de' massimi, e minimi, la quale solo con l' idea della curva si può togliere. Con la medesima condizione delle tre radici eguali si potrebbero ritrovare i Raggi Osculatori, ma giacchè di tali cose si tratterà nel seguente libro, porrò fine a questo per non recare troppo di noja.

FINE DEL PRIMO LIBRO.

## TOMO PRIMO.

| | ERRORI | CORREZIONI |
|---|---|---|
| Pag. 55 lin. 7 | $\sqrt{aa+3ax} - \sqrt{ax}$ | $\sqrt{aa+4ax} - \sqrt{ax}$ |
| Pag. 94 lin. 19 | paragonali | paragonarli |
| Pag. 146 lin. 9 | $-\sqrt{xx - \frac{aa}{xx}}$ | $-\sqrt{xx - \frac{a^4}{xx}}$ |
| Pag. 267 lin. 5 | $+ \int uz$ | $+ \int ux$ |
| Pag. 382 lin. 11 | num. 139. | num. 239. |
| Pag. 426 lin. 19 | tocecherà | toccherà |

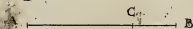
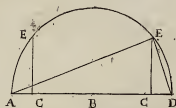
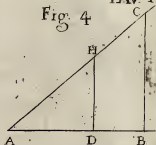
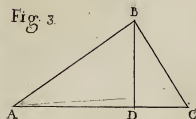
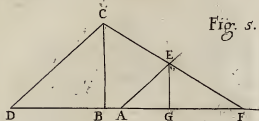
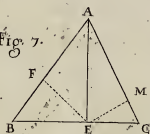
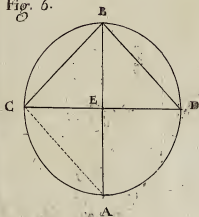
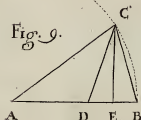
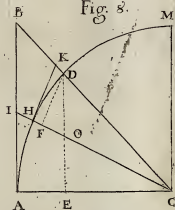
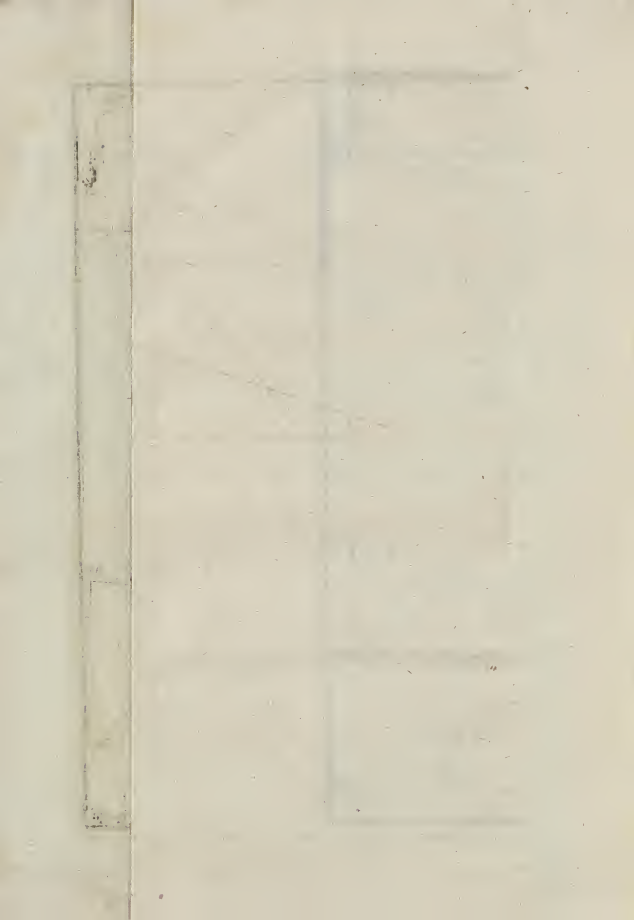
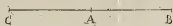
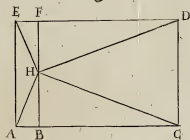
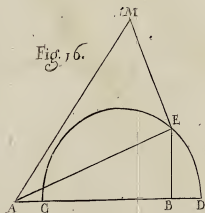
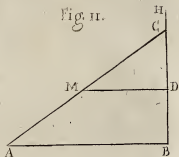
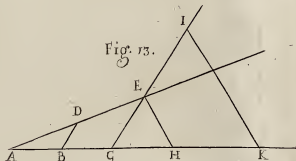
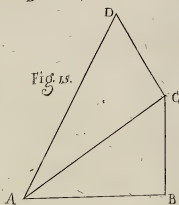
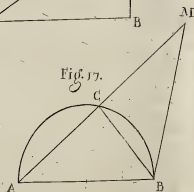
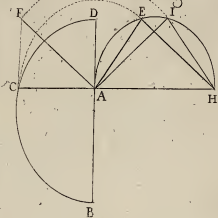
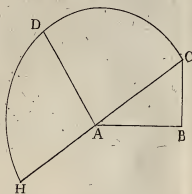
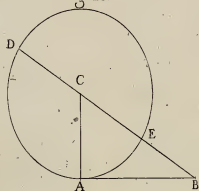
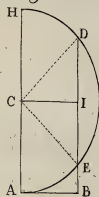
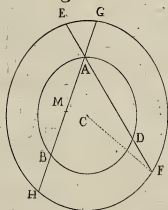
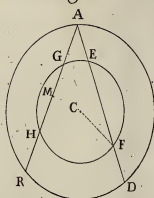
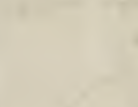
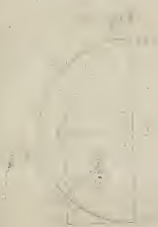
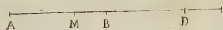
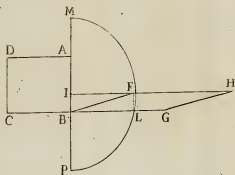
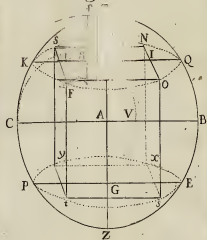
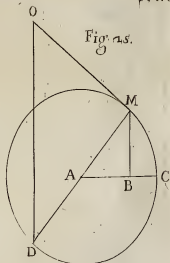
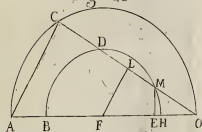
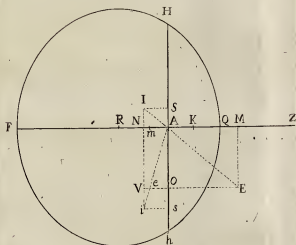
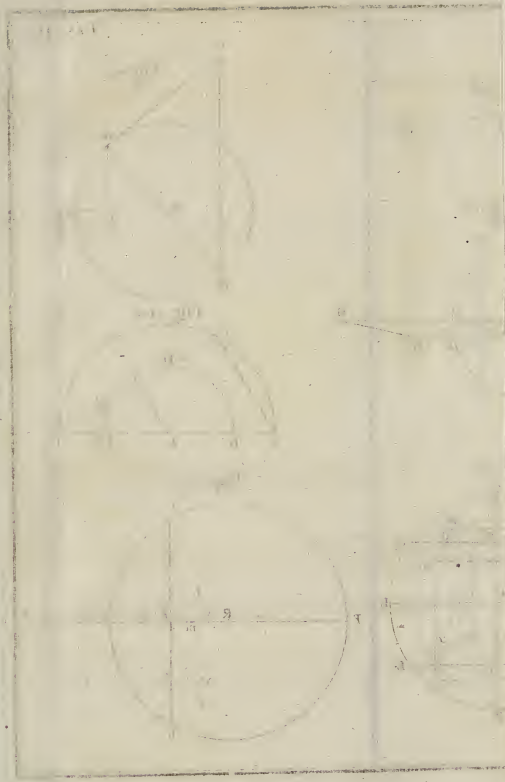
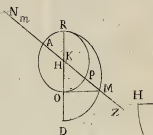
Fig. 10.
C
A
B
Fig. 11.
H
C
M
D
A
B
Fig. 12.
E
F
D
H
A
B
C
Fig. 13.
I
E
D
A
B
C
H
K
Fig. 14.
D
A
H
B
C
Fig. 15.
D
C
A
B
Fig. 16.
M
E
A
C
B
D
Fig. 17.
M
C
A
B

TOM.I.
TAV.III
Fig. 18.
F
D
E
I
C
A
H
B
Fig. 19.
D
C
A
B
H
Fig. 20.
D
C
E
A
B
Fig. 21.
H
D
C
I
E
A
B
Fig. 22.
E
G
A
M
C
D
B
F
H
Fig. 23.
A
G
E
M
C
H
F
R
D

Fig. 24.
A M B D
Fig. 25.
O M A B C D
Fig. 26.
M D A I F H C B L G P
Fig. 28.
C D L M A B F E H O
Fig. 27.
S N K I Q F O C A V B y x P G E t s Z
Fig. 29.
H I S F R N A K Q M Z m V e O E i s h

TOM. I.
TAV. V.
Fig. 30.
Fig. 33.
Fig. 32
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 31
d

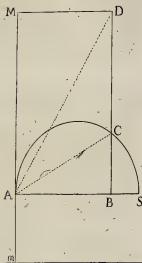
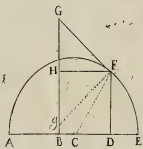
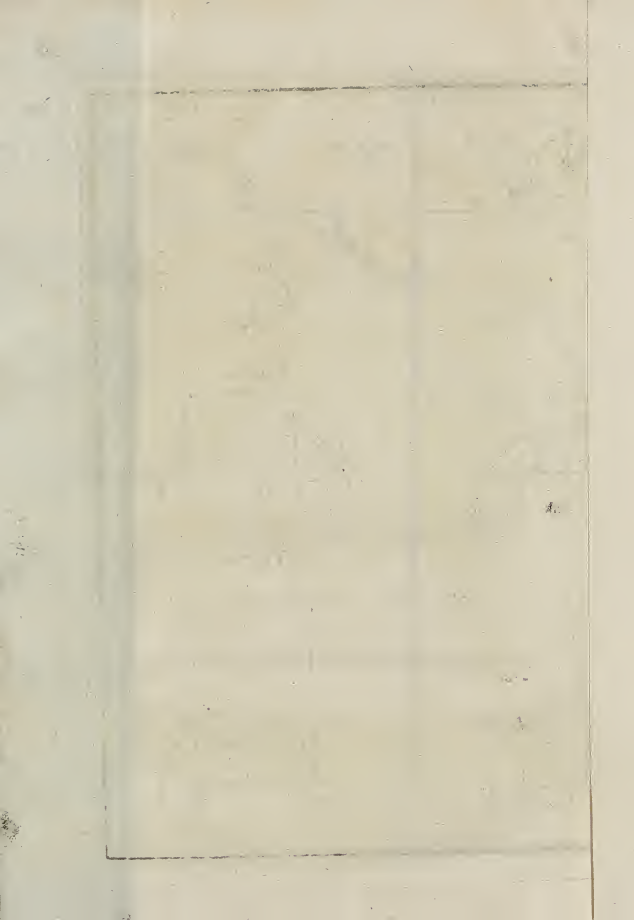
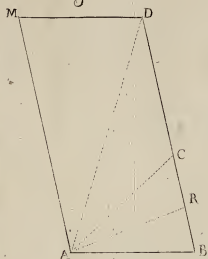
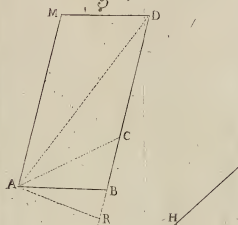
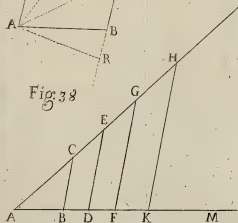
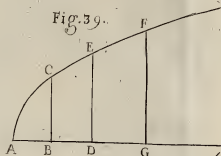
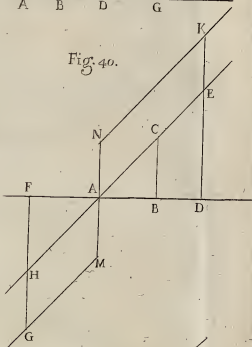
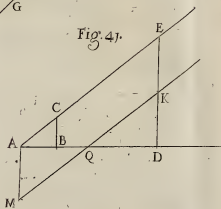
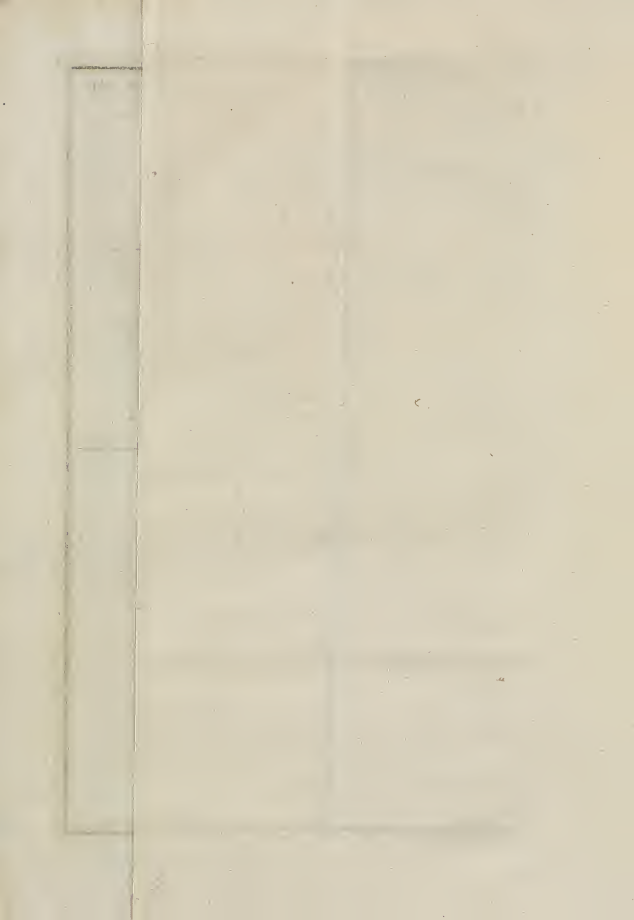
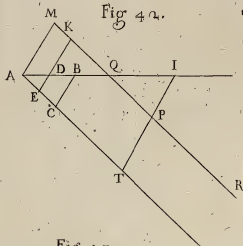
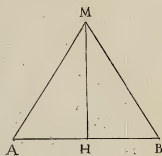
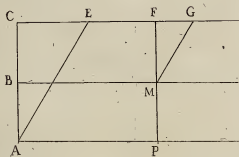
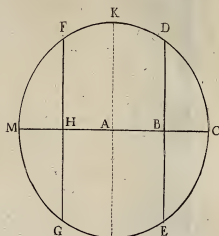
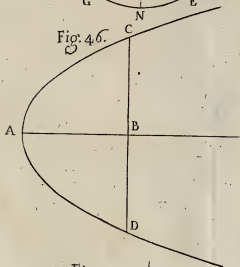
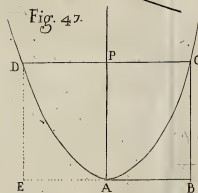
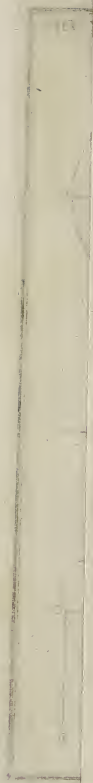



Fig. 36.
M
D
C
R
A
B
Fig. 37.
M
D
C
A
B
R
Fig. 38
A
B
D
F
K
M
C
E
G
H
Fig. 39.
A
B
D
G
C
E
F
Fig. 40.
K
E
N
C
F
A
B
D
M
H
G
Fig. 41.
E
K
C
A
B
Q
D
M

Fig. 42.
M
K
A
D
B
Q
I
E
C
P
T
R
Fig. 45.
K
F
D
M
H
A
B
C
G
N
E
Fig. 43.
M
A
H
B
Fig. 46.
C
A
B
D
Fig. 44.
C
E
F
G
B
M
A
P
Fig. 47.
P
D
C
E
A
B

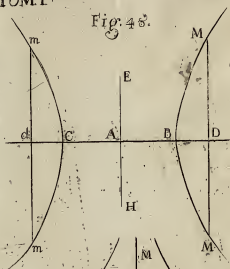
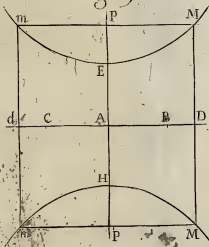
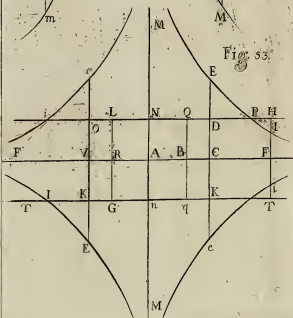
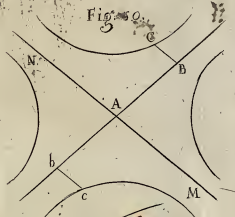
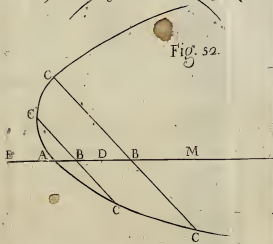
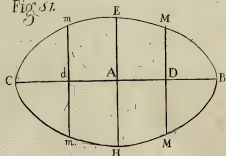
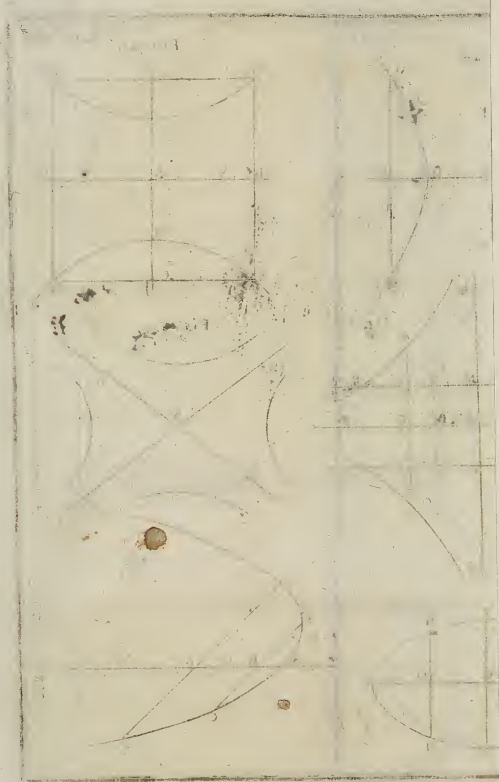
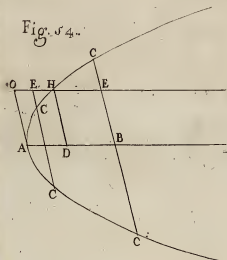
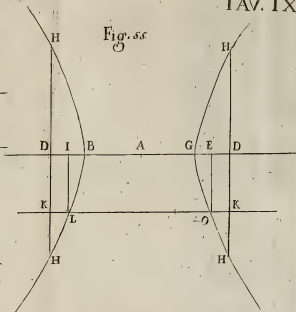
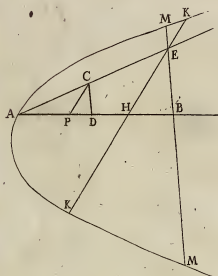
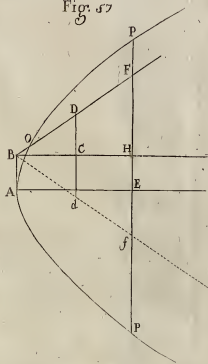
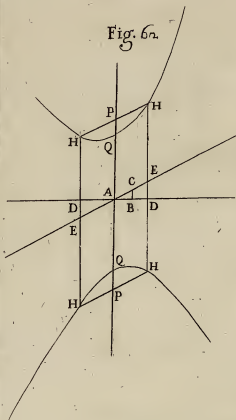
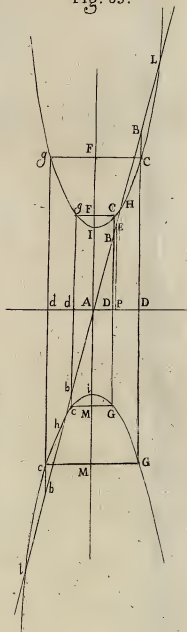
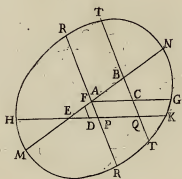
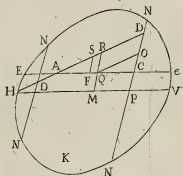
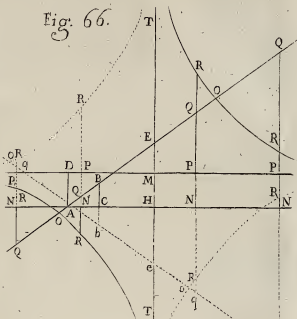
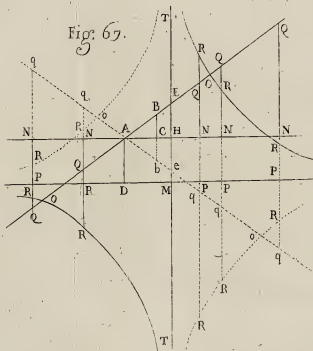
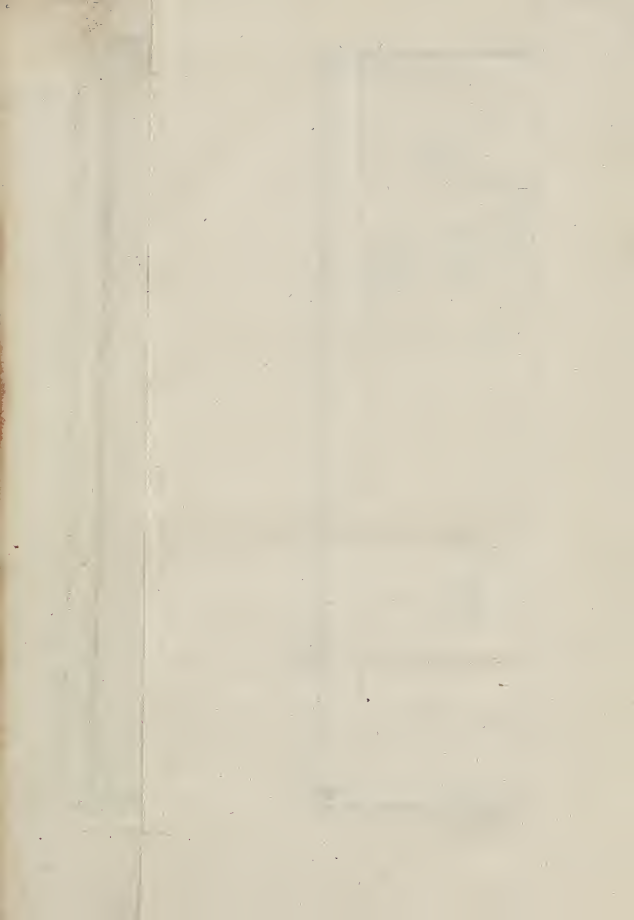
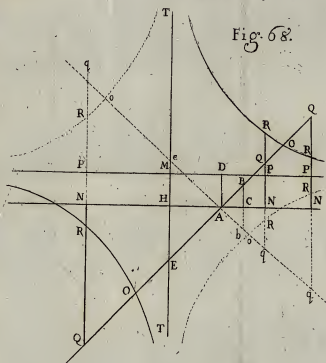
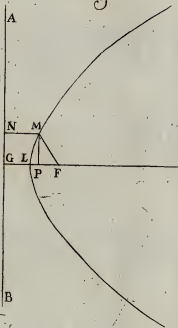
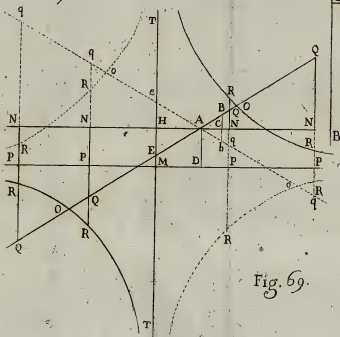
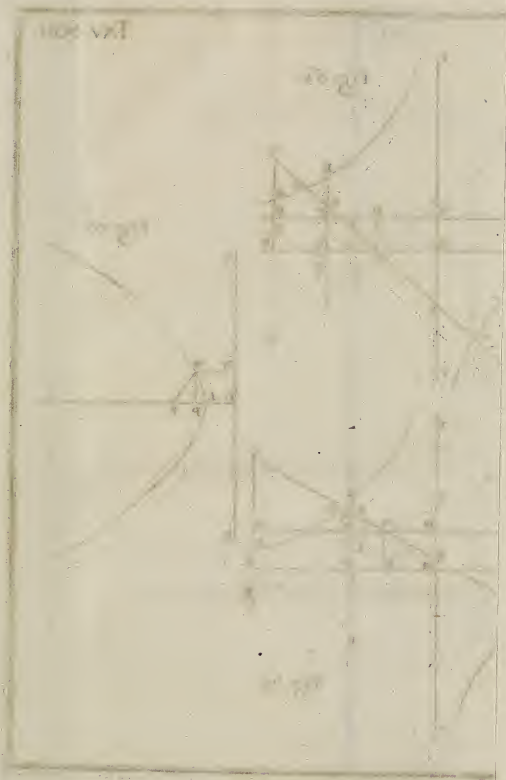
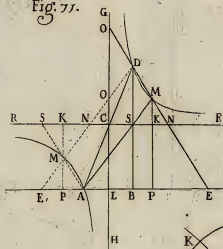
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.

TOM. I.
TAV. IX.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57

TOM. I.
TAV. X.
Fig. 58.
P
F
A
E
D
O
C
B
H
d
f
P
Fig. 59.
M
E
H
P
m
D
A
Q
B
C
m
M
Fig. 60.
D
D
E
O
B
P
A
h
H
C
Q
b
e
D
D
Fig. 61
D
Q
O
E
H
A
H
E
D
m
C
B
O
B
M
M

Fig. 62.
P
H
H
Q
E
C
A
D
B
D
E
Q
H
H
P
Fig. 63.
L
B
F
g
C
g F
C
H
E
I
B
d
d
A
D
P
D
b
i
c
M
G
h
c
M
G
b
l
Fig. 64.
T
R
N
B
A
C
F
G
E
H
D
P
Q
K
T
M
R

Tom. I.
Tav. XII.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.

Tom. I.
Tav. XIII.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.

Tom. I.
Tav. XIV.
Fig. 71.
Fig. 73.
Fig. 75.
Fig. 72.
Fig. 74.

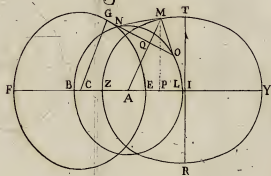
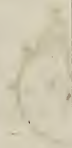
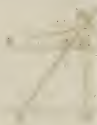



Fig. 76.
N
M
C
Q
A
P
D
B
Fig. 77.
N
M
Q
C
A
B
D
P
Fig. 78.
a
C
Q
M
N
A
D
P
B
Fig. 79.
O
C
M
m
D
T
p
p
Q
A
q
a
E
F
Fig. 80.
S
C
G
H
M
O
D
T
P
V
Q
A
E
F

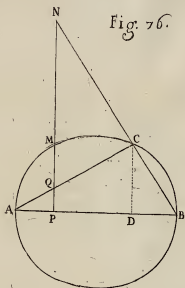
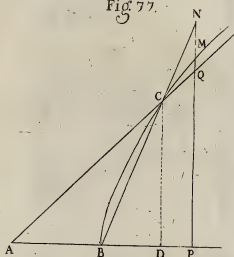
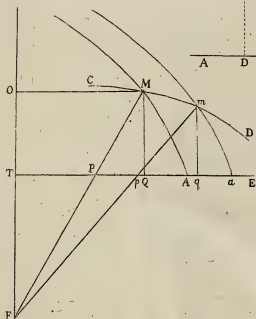
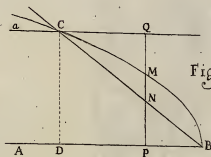
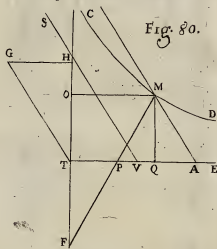
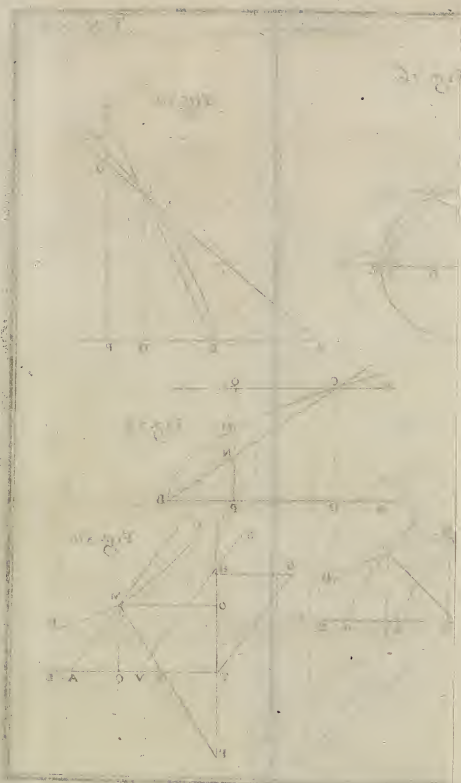
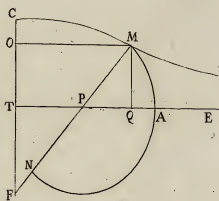
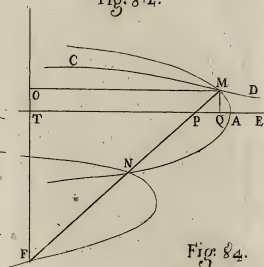
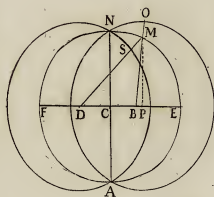
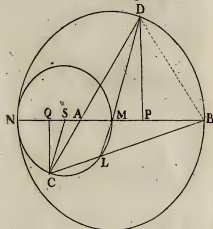
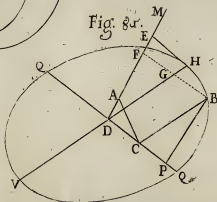
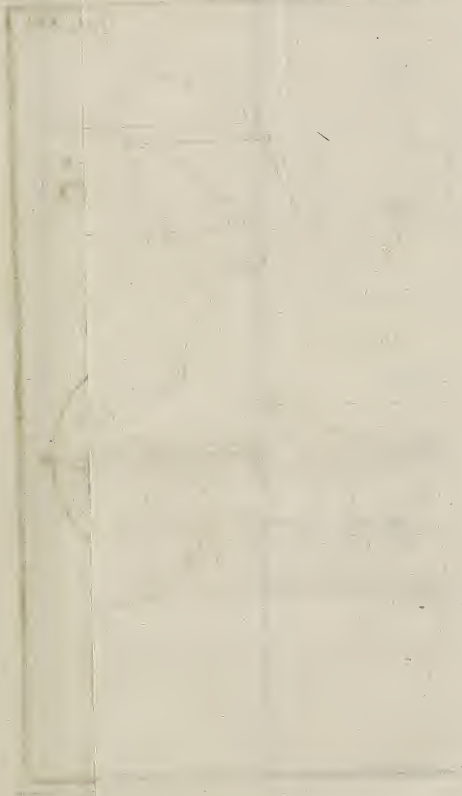
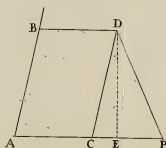
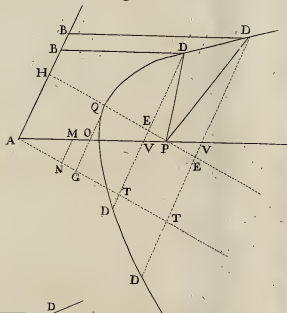
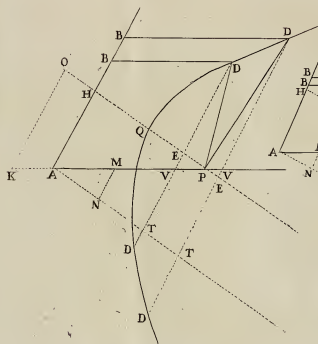



Fig. 81.
C
O
M
T
P
Q
A
E
N
F
Fig. 82.
C
M
D
O
T
P
Q
A
E
N
F
Fig. 83.
N
O
M
S
F
D
C
B
P
E
A
Fig. 84.
D
N
Q
S
A
M
P
B
L
C
Fig. 85.
M
E
F
H
G
Q
A
B
D
C
P
Q
V

Tom. I.
Tav. XVII
Fig. 86.
B D A C E P
Fig. 87.
B D B D H Q E A M O V P V E N G T D T D
Fig. 88.
B D O B D H Q E K A M V P V E N T D T D
Fig. 89
B D D B D H Q E E A M K D V V P O N D T T T D Q

Fig. 90.
H
E
M
G
N
D
K
O
V
I
C
A
B
S
R
Q
P
Fig. 91.
G
B
F
A
D
E
C
Fig. 93
A
C
E
H
F
B
D
L
R
Fig. 92.
f
M
m
A
e
C
E
F
B
D
G
g
Fig. 94.
E
D
A
M
L
I
H
C
N
B
R
G
F

Fig. 95.
P
S
O
N
I
M
R
V
C
D
A
B
Fig. 97.
M
Q
S
N
D
C
P
A
B
Fig. 98.
Q
M
m
m
S
A
B
P
R
M
M
T
Fig. 96.
M
A
P
E
C
B
O
D
M

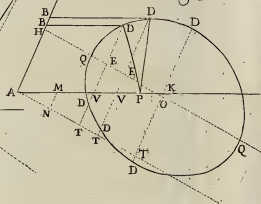
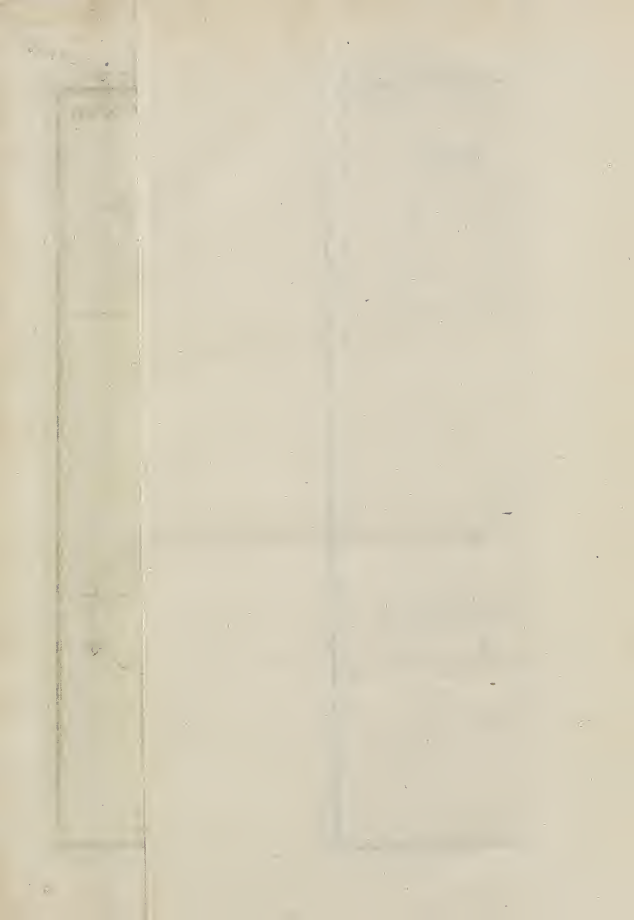
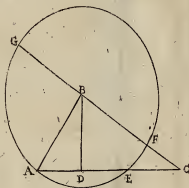
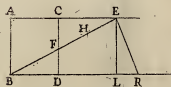
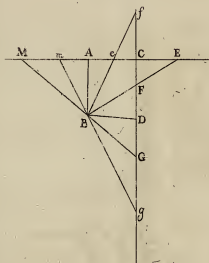



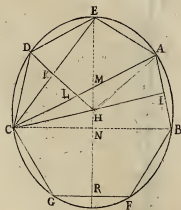
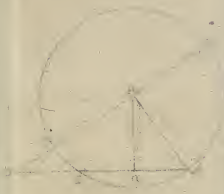
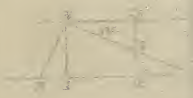
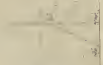
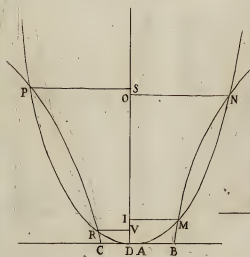
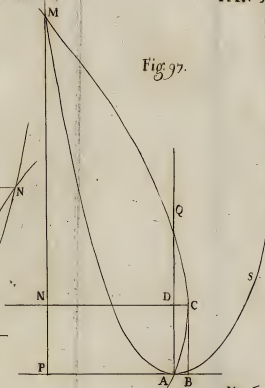
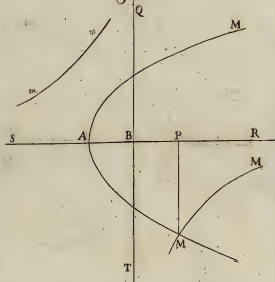
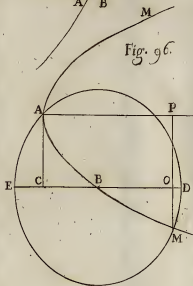
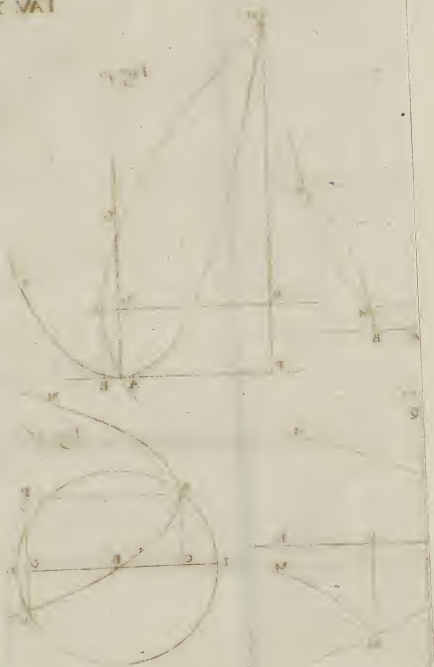
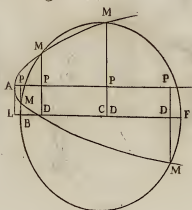
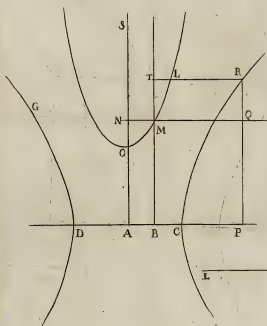
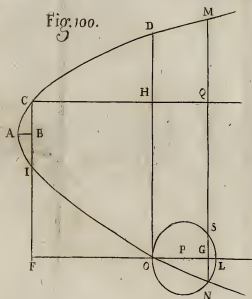
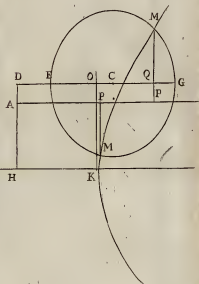
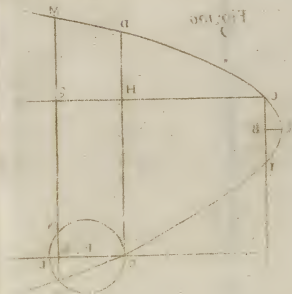
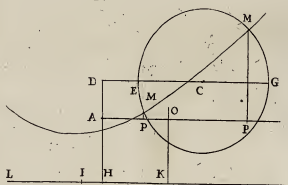
Fig. 99.
M
M
A
P
P
P
P
M
L
D
C
D
D
F
B
M
Fig. 100.
D
M
H
Q
C
A
B
I
S
P
G
F
O
L
N
Fig. 101.
S
T
L
R
G
N
Q
M
O
D
A
B
C
P
Fig. 102.
M
D
E
O
C
Q
G
A
P
P
M
L
I
H
K

TOM. I
TAV. XXI.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig 107
M
D
E
M
C
G
A
O
P
P
L
I
H
K
S
A
P
C
P
Q
B
R
R
M
R
L
M
C
H
A
B
P
N
O
D
F
E
G
M
C
H
A
B
N
M
B
A
P
N

Fig. 108.
L
M
C
Q
A
P
F
R
N
Fig. 109.
B
M
C
A
P
P
M
E
Fig. III
F
D
K
A
M
R
C
G
L
B
P
S
Q
V
N
F
Fig. 112.
C
C
F
G
M
M
O
B
P
G
C
B
A
P
Q
m
A
Q
Fig. 110
N

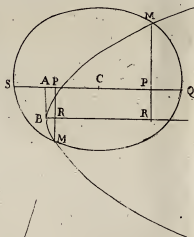
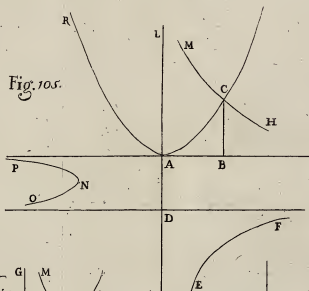
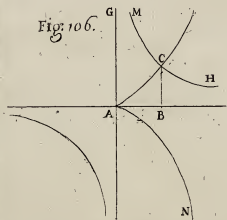
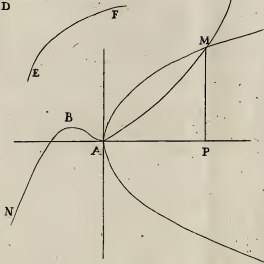
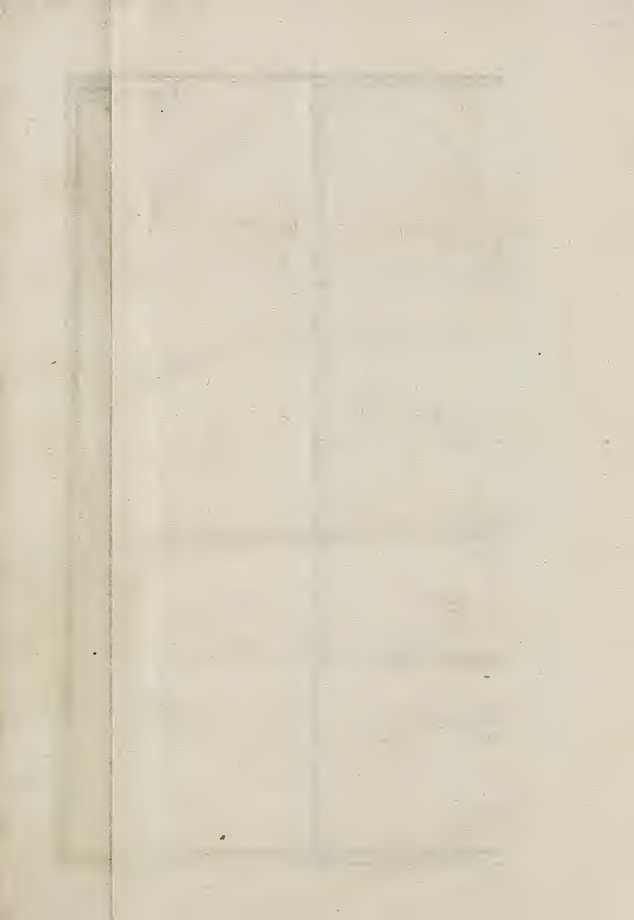
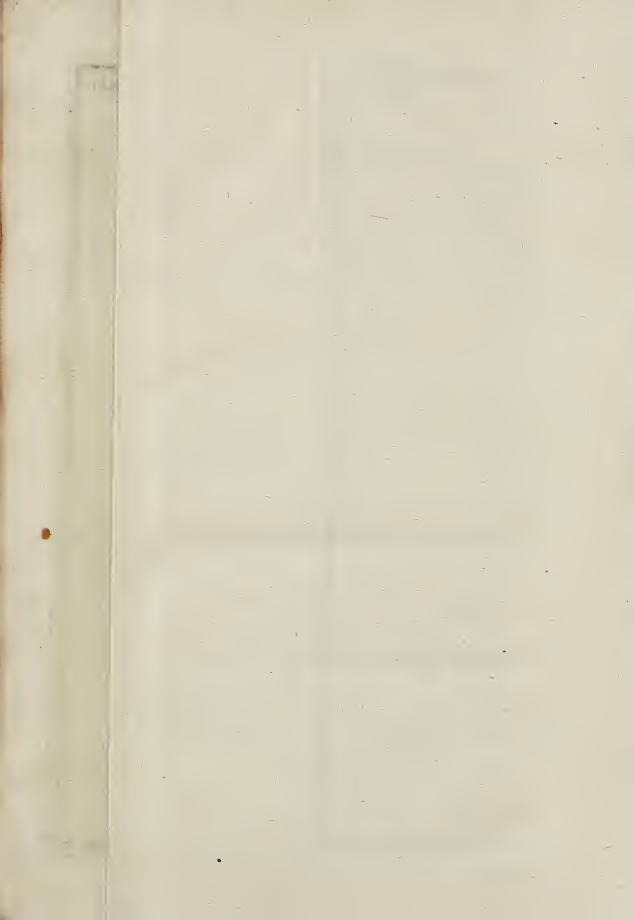
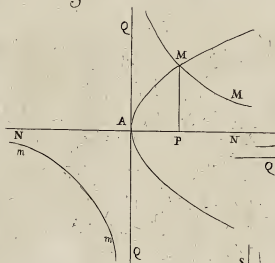
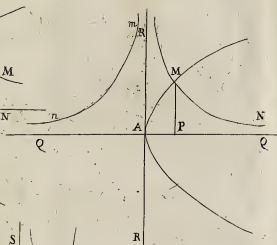
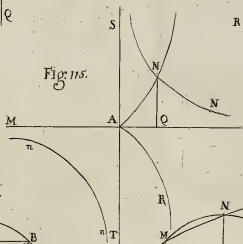
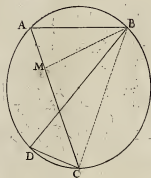
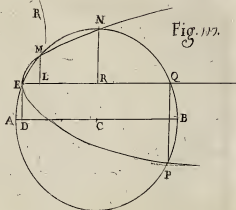
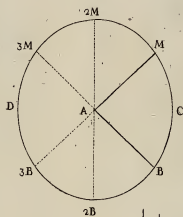
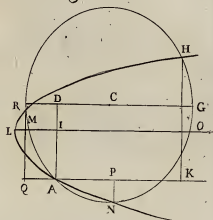
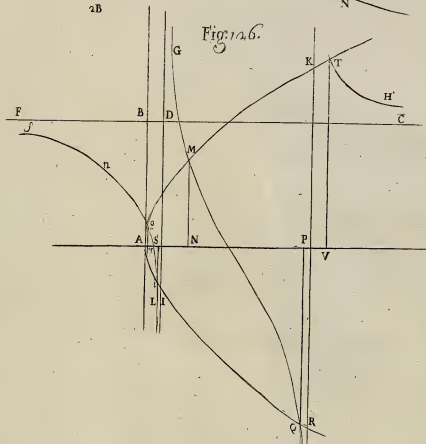
Fig. 113
Q
M
M
A
N
P
N
m
m
Q
Fig. 114.
m
R
M
N
n
A
P
Q
Q
R
S
N
Fig. 115.
N
M
A
Q
n
R
n
T
Fig. 116.
A
B
M
D
C
N
Fig. 117.
M
L
R
E
Q
A
D
C
B
P

TOM. I.
TAV. XXIV.
Fig. 118.
Fig: 119.
Fig: 122
Fig: 123.
Fig. 120
Fig. 121.

Fig. 124.
2M
3M
M
D
A
C
3B
B
2B
Fig. 125.
H
R
D
C
G
M
I
L
O
P
K
Q
A
N
Fig. 126.
G
K
T
H
F
B
D
C
M
n
A
S
N
P
V
L
I
Q
R

TOM. I.
TAV. XXVI
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
G
F
H
A
B
C
E
D
I
M
d
m
O
N
P
I
M
C
D
A
B
H
E
F
O
N
I
M
P
T
C
E
H
K
G
D
1
D
E
M
G
K
A
H
F
B
N
g
E
D
i

TOM. I.
TAV. XXVII.
Fig. 131.
D
A
N
B
C
M
Fig. 132.
P
T
R
M
E
F
K
N
D
A
B
C
Q
V
Fig. 134.
C
Q
R
F
E
H
M
I
A
B
D
P
S
r
Fig. 133.
s
m
S
F
d
E
D
Q
R
M
A
P
o
C
p
O
B
m
q
f
e
r

Fig. 135.
C
E
F
L
O
P
R
B
M
D
A
Q
Fig. 136.
A
I
V
T
E
O
M
N
S
N
R
Z
Q
B
X
P
Fig. 137.
A
I
K
V
E
M
N
S
N
R
Q
H
O
T
P
x
y
m

TOM. I.
TAV. XXVIIII
Fig. 138.
A
E
M
N
N
S
m
m
P
Fig. 139.
A
E
B
M
S
N
e
m
C
O
P
a

Fig. 140.
G
H
E
I
F
A
D
C
K
B
f
i
e
h
g
Fig. 141.
G
F
E
M
A
B
K
N
V
D
C
Fig. 142.
G
F
D
K
A
C
R
Q
S
P
B
Fig. 143.
E
C
A
B

Fig. 144
M
B
A
N
C
Fig. 145.
M
Q
K
P
F
D
A
H
G
C
B
E
Fig. 146.
R
S
T
B
C
E
M
P
A
I
F
V
K
G
H
O
Fig. 147
G
M
V
O
S
T
R
K
B
I
F
N P
A
Q
H
C
D

TOM. I.
TAV. XXXII.
Fig. 148
C
H
S
A
D
B
F
O
M
Fig. 149
P
E
D
H
A
F
B
G
T
M
C
Fig. 150
A
Fig. 151.
N
G
H
F
C
T
D
M
O
P
Q
B
A
K

Tom. I.
Tav XXXIII.
Fig. 152.
L
B
C
K
Q
H
M
A
D
F
G
E
P
Fig. 153.
Q
H
H
M D S
M
M
M
P A P
B P
H
H

Fig. 154.
K
F
G
A
B
Fig. 155.
H
L
I
N
K
G
M
F
A
D
C
E
B
Fig. 156.
H
L
I
N
K
G
M
F
A
D
C
E
B
Fig. 157.
M
L
C
T
A
G
E
F
P
H
Fig. 158.
M
L
T
A
Q
N

TOM. I.
TAV. XXXV.
Fig. 159.
D
M
N
E
T
H
A
B
K
C
Fig. 160.
M
F
N
C
T
G
A
H
V
P
Fig. 161.
M
M
C
T
A
P
T
A
V
Fig. 162.
Q
F
S
B